

Cryptographie à clé publique

Cours 5

Julien Lavauzelle

Université Paris 8

Master 1 mathématiques et applications – parcours ACC

04/03/2026

1. Schémas de signature

Rappels succincts
Signature ElGamal
DSA et ECDSA

2. Applications

Certification
Chiffrement à clef publique authentifié

1. Schémas de signature

- Rappels succincts
- Signature ElGamal
- DSA et ECDSA

2. Applications

- Certification
- Chiffrement à clef publique authentifié

1. Schémas de signature

Rappels succincts

Signature ElGamal

DSA et ECDSA

2. Applications

Certification

Chiffrement à clef publique authentifié

RSA : KeyGen

1. Calculer $n = pq$ et $\phi(n) = (p - 1)(q - 1)$, où p et q sont deux grands nombres premiers aléatoires
2. Choisir e et d tels que $ed \equiv 1 \pmod{\phi(n)}$
3. La clé publique est $\text{pk} = (e, n)$, la clé privée est $\text{sk} = d$.

L'espace des messages est $\mathcal{M} = \{0, 1\}^*$ et celui des signatures est $\mathcal{S} = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

RSA-FDH : Sign(\mathbf{m} , sk)

On suppose que $\mathbf{m} \in \{0, 1\}^*$ et que $H : \{0, 1\}^* \rightarrow \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est une fonction de hachage.

1. Hacher \mathbf{m} , c'est-à-dire calculer $h := H(\mathbf{m})$
2. Calculer et retourner $s = h^d \pmod{n}$.

RSA-FDH : Verif(\mathbf{m} , s, pk)

1. Calculer $h' = s^e \pmod{n}$.
2. Hacher \mathbf{m} , c'est-à-dire calculer $h := H(\mathbf{m})$
3. Faire le test $h' = h$ et retourner le booléen associé.

1. Schémas de signature

Rappels succincts
Signature ElGamal
DSA et ECDSA

2. Applications

Certification
Chiffrement à clef publique authentifié

On se place dans le groupe multiplicatif \mathbb{F}_p^\times , où p est premier. On note g un générateur du groupe.

On se place dans le groupe multiplicatif \mathbb{F}_p^\times , où p est premier. On note g un générateur du groupe.

On va décrire une signature « brute », sans fonction de hachage :

- l'espace des messages est $\mathcal{M} = \mathbb{F}_p^\times$
- l'espace des signatures est $\mathcal{S} = \mathbb{F}_p^\times \times \mathbb{Z}/(p-1)\mathbb{Z}$.

Une version sûre et efficace sera donnée via la signature (EC)DSA, un peu plus tard.

On se place dans le groupe multiplicatif \mathbb{F}_p^\times , où p est premier. On note g un générateur du groupe.

On va décrire une signature « brute », sans fonction de hachage :

- l'espace des messages est $\mathcal{M} = \mathbb{F}_p^\times$
- l'espace des signatures est $\mathcal{S} = \mathbb{F}_p^\times \times \mathbb{Z}/(p-1)\mathbb{Z}$.

Une version sûre et efficace sera donnée via la signature (EC)DSA, un peu plus tard.

La génération des clés est **identique** à celle du chiffrement ElGamal :

ElGamal : KeyGen

1. Choisir aléatoirement $a \in \mathbb{Z}/(p-1)\mathbb{Z}$.
2. Calculer $\alpha = g^a \pmod p$.
3. La clé publique est $\text{pk} = \alpha$, la clé privée est $\text{sk} = a$.

Rappel : message $m \in \mathbb{F}_p^\times$.

ElGamal : Sign(m, sk)

1. Choisir aléatoirement $k \in (\mathbb{Z}/(p-1)\mathbb{Z})^\times$ (c'est-à-dire, inversible modulo $p-1$)
2. Calculer $b = g^k \pmod{p}$.
3. Calculer $c = (m - ab)k^{-1} \pmod{p-1}$.
4. Retourner $s = (b, c)$.

Remarque. L'élément b est d'abord vu comme un élément du groupe \mathbb{F}_p^\times , puis comme un entier modulo $p-1$ (donc, un "exposant").

Aussi, observons qu'il ne dépend pas du message.

Rappel : message $m \in \mathbb{F}_p^\times$.

ElGamal : Sign(m, sk)

1. Choisir aléatoirement $k \in (\mathbb{Z}/(p-1)\mathbb{Z})^\times$ (c'est-à-dire, inversible modulo $p-1$)
2. Calculer $b = g^k \pmod p$.
3. Calculer $c = (m - ab)k^{-1} \pmod{p-1}$.
4. Retourner $s = (b, c)$.

Remarque. L'élément b est d'abord vu comme un élément du groupe \mathbb{F}_p^\times , puis comme un entier modulo $p-1$ (donc, un "exposant").

Aussi, observons qu'il ne dépend pas du message.

ElGamal : Verif(m, s, pk)

1. Calculer $x = \alpha^b \cdot b^c \pmod p$ et $y = g^m \pmod p$.
2. Faire le test $x = y$ et retourner le booléen associé.

Résumé (signature ElGamal dans \mathbb{F}_p^\times).

Clés : $pk = \alpha = g^a$, $sk = a$,

Signature : $s = (b, c)$ où

$$b = g^k \pmod{p}$$

$$c = (m - ab)k^{-1} \pmod{p-1}$$

Vérification : $\alpha^b \cdot b^c \stackrel{?}{\equiv} g^m \pmod{p}$

Résumé (signature ElGamal dans \mathbb{F}_p^\times).

Clés : $pk = \alpha = g^a$, $sk = a$,

Signature : $s = (b, c)$ où

$$b = g^k \pmod{p}$$

$$c = (m - ab)k^{-1} \pmod{p-1}$$

Vérification : $\alpha^b \cdot b^c \stackrel{?}{\equiv} g^m \pmod{p}$

Validité. On vérifie que

$$\alpha^b \cdot b^c = g^{ab+k(m-ab)k^{-1} \pmod{p-1}} \equiv g^m \pmod{p}$$

Résumé (signature ElGamal dans \mathbb{F}_p^\times).Clés : $pk = \alpha = g^a$, $sk = a$,Signature : $s = (b, c)$ où

$$b = g^k \pmod{p}$$

$$c = (m - ab)k^{-1} \pmod{(p-1)}$$

Vérification : $\alpha^b \cdot b^c \stackrel{?}{\equiv} g^m \pmod{p}$ **Validité.** On vérifie que

$$\alpha^b \cdot b^c = g^{ab+k(m-ab)k^{-1} \pmod{(p-1)}} \equiv g^m \pmod{p}$$

Remarque. On peut facilement définir une variante de cette signature dans le sous-groupe des résidus quadratiques.

Paramètres. On prend de petites tailles pour l'exemple : $p = 467$, $g = 2$.

Paramètres. On prend de petites tailles pour l'exemple : $p = 467$, $g = 2$.

Génération de clés. Alice engendre la clé privée $a = 127$; la clé publique est donc $\alpha = g^a = 2^{127} \bmod 467 \equiv 132$.

Paramètres. On prend de petites tailles pour l'exemple : $p = 467$, $g = 2$.

Génération de clés. Alice engendre la clé privée $a = 127$; la clé publique est donc $\alpha = g^a = 2^{127} \bmod 467 \equiv 132$.

Signature. Supposons qu'Alice veuille signer le message $m = 100$.

Paramètres. On prend de petites tailles pour l'exemple : $p = 467$, $g = 2$.

Génération de clés. Alice engendre la clé privée $a = 127$; la clé publique est donc $\alpha = g^a = 2^{127} \bmod 467 \equiv 132$.

Signature. Supposons qu'Alice veuille signer le message $m = 100$.

Elle choisit la valeur aléatoire $k = 213$. On vérifie bien que

$$\text{pgcd}(k, p - 1) = \text{pgcd}(213, 466) = 1, \text{ et}$$

$$k^{-1} \bmod (p - 1) \text{ vaut alors } 431.$$

Paramètres. On prend de petites tailles pour l'exemple : $p = 467$, $g = 2$.

Génération de clés. Alice engendre la clé privée $a = 127$; la clé publique est donc $\alpha = g^a = 2^{127} \bmod 467 \equiv 132$.

Signature. Supposons qu'Alice veuille signer le message $m = 100$.

Elle choisit la valeur aléatoire $k = 213$. On vérifie bien que

$$\text{pgcd}(k, p - 1) = \text{pgcd}(213, 466) = 1, \text{ et}$$

$$k^{-1} \bmod (p - 1) \text{ vaut alors } 431.$$

Alice calcule alors

$$b = g^k = 2^{213} \equiv 29 \bmod 467$$

$$c = (m - ab)k^{-1} = (100 - 127 \times 29) \times 431 \equiv 51 \bmod 466$$

Paramètres. On prend de petites tailles pour l'exemple : $p = 467$, $g = 2$.

Génération de clés. Alice engendre la clé privée $a = 127$; la clé publique est donc $\alpha = g^a = 2^{127} \bmod 467 \equiv 132$.

Signature. Supposons qu'Alice veuille signer le message $m = 100$.

Elle choisit la valeur aléatoire $k = 213$. On vérifie bien que

$$\text{pgcd}(k, p - 1) = \text{pgcd}(213, 466) = 1, \text{ et}$$

$$k^{-1} \bmod (p - 1) \text{ vaut alors } 431.$$

Alice calcule alors

$$b = g^k = 2^{213} \equiv 29 \bmod 467$$

$$c = (m - ab)k^{-1} = (100 - 127 \times 29) \times 431 \equiv 51 \bmod 466$$

Vérification. On peut alors publiquement vérifier la signature $(29, 51)$ d'Alice pour le message $m = 100$:

$$\text{d'une part, } \alpha^b \cdot b^c = 132^{29} \cdot 29^{51} \equiv 189 \bmod 467,$$

$$\text{d'autre part, } g^m = 2^{100} \equiv 189 \bmod 467.$$

On va montrer que la signature ElGamal "brute" **n'est pas EUF-KOA**.

On va montrer que la signature ElGamal "brute" **n'est pas EUF-KOA**.

But. À partir de la clé publique uniquement, calculer m et $s = (b, c)$ tel que $\text{Verif}(m, s, \text{pk}) = \text{true}$.

On va montrer que la signature ElGamal "brute" **n'est pas EUF-KOA**.

But. À partir de la clé publique uniquement, calculer m et $s = (b, c)$ tel que $\text{Verif}(m, s, \text{pk}) = \text{true}$.

Idée : on va écrire $b = g^i \alpha^j$ pour $i, j \in \{0, \dots, p-2\}$. Cette écriture **n'est pas unique**.

On va montrer que la signature ElGamal "brute" **n'est pas EUF-KOA**.

But. À partir de la clé publique uniquement, calculer m et $s = (b, c)$ tel que $\text{Verif}(m, s, \text{pk}) = \text{true}$.

Idée : on va écrire $b = g^i \alpha^j$ pour $i, j \in \{0, \dots, p-2\}$. Cette écriture **n'est pas unique**.
Dans ce cas, la condition de vérification est :

$$\alpha^b (g^i \alpha^j)^c = g^m \pmod{p} \iff \alpha^{b+jc} = g^{m-ic} \pmod{p}$$

On va montrer que la signature ElGamal "brute" **n'est pas EUF-KOA**.

But. À partir de la clé publique uniquement, calculer m et $s = (b, c)$ tel que $\text{Verif}(m, s, \text{pk}) = \text{true}$.

Idée : on va écrire $b = g^i \alpha^j$ pour $i, j \in \{0, \dots, p-2\}$. Cette écriture **n'est pas unique**.

Dans ce cas, la condition de vérification est :

$$\alpha^b (g^i \alpha^j)^c = g^m \pmod{p} \iff \alpha^{b+jc} = g^{m-ic} \pmod{p}$$

Cette condition est vérifiée **en particulier** si on a :

$$b + jc \equiv 0 \pmod{p-1} \quad \text{et} \quad m - ic \equiv 0 \pmod{p-1}$$

On va montrer que la signature ElGamal "brute" **n'est pas EUF-KOA**.

But. À partir de la clé publique uniquement, calculer m et $s = (b, c)$ tel que $\text{Verif}(m, s, \text{pk}) = \text{true}$.

Idée : on va écrire $b = g^i \alpha^j$ pour $i, j \in \{0, \dots, p-2\}$. Cette écriture **n'est pas unique**.

Dans ce cas, la condition de vérification est :

$$\alpha^b (g^i \alpha^j)^c = g^m \pmod{p} \iff \alpha^{b+jc} = g^{m-ic} \pmod{p}$$

Cette condition est vérifiée **en particulier** si on a :

$$b + jc \equiv 0 \pmod{p-1} \quad \text{et} \quad m - ic \equiv 0 \pmod{p-1}$$

L'idée est alors de construire d'abord i quelconque et j inversible modulo $p-1$ quelconque, puis de définir b, c et m en fonction :

$$\begin{cases} b &= g^i \alpha^j & \pmod{p} \\ c &= -bj^{-1} & \pmod{p-1} \\ m &= ic & \pmod{p-1} \end{cases}$$

On va montrer que la signature ElGamal "brute" **n'est pas EUF-KOA**.

But. À partir de la clé publique uniquement, calculer m et $s = (b, c)$ tel que $\text{Verif}(m, s, \text{pk}) = \text{true}$.

Idée : on va écrire $b = g^i \alpha^j$ pour $i, j \in \{0, \dots, p-2\}$. Cette écriture **n'est pas unique**.

Dans ce cas, la condition de vérification est :

$$\alpha^b (g^i \alpha^j)^c = g^m \pmod{p} \iff \alpha^{b+jc} = g^{m-ic} \pmod{p}$$

Cette condition est vérifiée **en particulier** si on a :

$$b + jc \equiv 0 \pmod{p-1} \quad \text{et} \quad m - ic \equiv 0 \pmod{p-1}$$

L'idée est alors de construire d'abord i quelconque et j inversible modulo $p-1$ quelconque, puis de définir b, c et m en fonction :

$$\begin{cases} b &= g^i \alpha^j & \pmod{p} \\ c &= -bj^{-1} & \pmod{p-1} \\ m &= ic & \pmod{p-1} \end{cases}$$

Important. Par l'utilisation d'une fonction de hachage, ces menaces peuvent être levées.

1. Schémas de signature

Rappels succincts
Signature ElGamal
DSA et ECDSA

2. Applications

Certification
Chiffrement à clef publique authentifié

DSA : *Digital Signature Algorithm*. Proposé par la NSA en 1991, sélectionné par le NIST comme standard (processus non-public...).

DSA : *Digital Signature Algorithm*. Proposé par la NSA en 1991, sélectionné par le NIST comme standard (processus non-public...).

C'est essentiellement une **variante de la signature ElGamal** :

1. avec un module d'exposant plus petit,
2. où l'on **hache** le message m qui intervient dans l'exposant.

DSA : *Digital Signature Algorithm*. Proposé par la NSA en 1991, sélectionné par le NIST comme standard (processus non-public...).

C'est essentiellement une **variante de la signature ElGamal** :

1. avec un module d'exposant plus petit,
2. où l'on **hache** le message m qui intervient dans l'exposant.

Remarques. À propos de la signature ElGamal :

- il faut garder un groupe \mathbb{F}_p^\times de taille 2048 bits pour que le problème du logarithme reste difficile,
- **mais** le nombre d'exposants "possibles" peut être plus petit : 2^{224} exposants permettent d'avoir 112 bits de sécurité sur la fonction de hachage (à cause des collisions par le paradoxe des anniversaires)

DSA : *Digital Signature Algorithm*. Proposé par la NSA en 1991, sélectionné par le NIST comme standard (processus non-public...).

C'est essentiellement une **variante de la signature ElGamal** :

1. avec un module d'exposant plus petit,
2. où l'on **hache** le message m qui intervient dans l'exposant.

Remarques. À propos de la signature ElGamal :

- il faut garder un groupe \mathbb{F}_p^\times de taille 2048 bits pour que le problème du logarithme reste difficile,
- **mais** le nombre d'exposants "possibles" peut être plus petit : 2^{224} exposants permettent d'avoir 112 bits de sécurité sur la fonction de hachage (à cause des collisions par le paradoxe des anniversaires)

Intérêt principal : obtenir des signatures plus courtes !

Paramètres du système.

1. Choisir q un nombre premier de 224 bits minimum.
2. Choisir p un nombre premier de 2048 bits minimum, tel que
 - $p - 1$ est divisible par q ,
 - le logarithme discret dans \mathbb{F}_p^\times est difficile.
3. Calculer g un générateur d'un sous-groupe cyclique \mathbb{G} d'ordre q de \mathbb{F}_p^\times .

Paramètres du système.

1. Choisir q un nombre premier de 224 bits minimum.
2. Choisir p un nombre premier de 2048 bits minimum, tel que
 - $p - 1$ est divisible par q ,
 - le logarithme discret dans \mathbb{F}_p^\times est difficile.
3. Calculer g un générateur d'un sous-groupe cyclique \mathbb{G} d'ordre q de \mathbb{F}_p^\times .
4. On se donne également une fonction de hachage H sur 224 bits (par exemple).

Paramètres du système.

1. Choisir q un nombre premier de 224 bits minimum.
2. Choisir p un nombre premier de 2048 bits minimum, tel que
 - $p - 1$ est divisible par q ,
 - le logarithme discret dans \mathbb{F}_p^\times est difficile.
3. Calculer g un générateur d'un sous-groupe cyclique G d'ordre q de \mathbb{F}_p^\times .
4. On se donne également une fonction de hachage H sur 224 bits (par exemple).

Signature DSA : KeyGen

1. Choisir a aléatoirement dans $\{0, \dots, q - 1\}$.
2. Calculer $\alpha = g^a \pmod p$.
3. La clé publique est $\text{pk} = \alpha \in \mathbb{F}_p^\times$, la clé privée est $\text{sk} = a \in \{0, \dots, q - 1\}$.

- L'espace des messages est $\mathcal{M} = \{0, 1\}^*$.
- L'espace des signatures est $\mathcal{S} = \{1, \dots, q - 1\}^2$.

- L'espace des messages est $\mathcal{M} = \{0, 1\}^*$.
- L'espace des signatures est $\mathcal{S} = \{1, \dots, q - 1\}^2$.

Signature DSA : $\text{Sign}(\mathbf{m}, s_k)$

1. Calculer $h = H(\mathbf{m})$.
2. Choisir k aléatoirement dans $\{1, \dots, q - 1\}$.
3. Calculer $b = (g^k \bmod p) \bmod q$. (de taille réduite)
4. Calculer $c = (h + ab)k^{-1} \bmod q$. (de taille réduite)
5. Si $b = 0$ ou $c = 0$, revenir à l'étape 2.
6. Sinon, retourner $s = (b, c)$.

- L'espace des messages est $\mathcal{M} = \{0, 1\}^*$.
- L'espace des signatures est $\mathcal{S} = \{1, \dots, q - 1\}^2$.

Signature DSA : Sign(\mathbf{m} , sk)

1. Calculer $h = H(\mathbf{m})$.
2. Choisir k aléatoirement dans $\{1, \dots, q - 1\}$.
3. Calculer $b = (g^k \bmod p) \bmod q$. (de taille réduite)
4. Calculer $c = (h + ab)k^{-1} \bmod q$. (de taille réduite)
5. Si $b = 0$ ou $c = 0$, revenir à l'étape 2.
6. Sinon, retourner $s = (b, c)$.

Signature DSA : Verif(\mathbf{m} , s , pk)

1. Calculer $h = H(\mathbf{m})$.
2. Extraire $(b, c) = s$, puis calculer $x = g^{hc^{-1} \bmod q} \alpha^{bc^{-1} \bmod q} \bmod p$.
3. Faire le test $x \equiv b \bmod q$ et retourner le booléen associé.

Validité.

Validité. On a :

$$x = g^{hc^{-1} \bmod q} \alpha^{bc^{-1} \bmod q} = g^{(h+ab)c^{-1} \bmod q} = g^k \bmod q = g^k \bmod p$$

Par définition, on a donc

$$x \equiv b \pmod{q}$$

Validité. On a :

$$x = g^{hc^{-1} \bmod q} \alpha^{bc^{-1} \bmod q} = g^{(h+ab)c^{-1} \bmod q} = g^k \bmod q = g^k \bmod p$$

Par définition, on a donc

$$x \equiv b \pmod{q}$$

Théorème. Sous les hypothèses suivantes :

- le problème du logarithme discret est difficile,
- on se place dans le modèle de l'oracle aléatoire (fonctions de hachage "idéales"),
- le générateur d'aléa est parfait,

la **signature DSA est EUF-CMA** (= résistante aux attaques de falsification existentielle à message choisi).

Validité. On a :

$$x = g^{hc^{-1} \bmod q} \alpha^{bc^{-1} \bmod q} = g^{(h+ab)c^{-1} \bmod q} = g^k \bmod q = g^k \bmod p$$

Par définition, on a donc

$$x \equiv b \pmod{q}$$

Théorème. Sous les hypothèses suivantes :

- le problème du logarithme discret est difficile,
- on se place dans le modèle de l'oracle aléatoire (fonctions de hachage "idéales"),
- le générateur d'aléa est parfait,

la **signature DSA est EUF-CMA** (= résistante aux attaques de falsification existentielle à message choisi).

Performances :

- ▶ **Calcul efficace** : un haché du message + $O(1)$ exponentiations dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ + $O(1)$ calculs dans $\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$.
- ▶ **Taille de clefs** : $\log_2 p = 2048$ bits pour la clé publique, $\log_2 q = 224$ bits pour la clé privée.
- ▶ **Taille de signature** : $2 \log_2 q = 448$ bits.

On peut étendre DSA aux **groupes de points de courbes elliptiques**. Le standard « ECDSA » apparaît en 2000.

C'est essentiellement le même algorithme que DSA !

On peut étendre DSA aux **groupes de points de courbes elliptiques**. Le standard « ECDSA » apparaît en 2000.

C'est essentiellement le même algorithme que DSA !

Paramètres du système.

1. Choisir une courbe elliptique E sur \mathbb{F}_p pour laquelle
 - l'ordre n du groupe de points est divisible par un grand nombre premier q (typiquement ≥ 224 bits),
 - le logarithme discret dans le sous-groupe d'ordre q est difficile.
2. Calculer P un générateur du sous-groupe cyclique d'ordre q .
3. On se donne également une fonction de hachage H sur 224 bits (par exemple).

On peut étendre DSA aux **groupes de points de courbes elliptiques**. Le standard « ECDSA » apparaît en 2000.

C'est essentiellement le même algorithme que DSA !

Paramètres du système.

1. Choisir une courbe elliptique E sur \mathbb{F}_p pour laquelle
 - l'ordre n du groupe de points est divisible par un grand nombre premier q (typiquement ≥ 224 bits),
 - le logarithme discret dans le sous-groupe d'ordre q est difficile.
2. Calculer P un générateur du sous-groupe cyclique d'ordre q .
3. On se donne également une fonction de hachage H sur 224 bits (par exemple).

Signature ECDSA : KeyGen

1. Choisir a aléatoirement dans $\{0, \dots, q - 1\}$.
2. Calculer le point de la courbe $A = aP$.
3. La clé publique est $pk = A$, la clé privée est $sk = a$.

Signature ECDSA : $\text{Sign}(\mathbf{m}, s\mathbf{k})$

1. Calculer $h = H(\mathbf{m})$.
2. Choisir $k \in \{1, \dots, q-1\}$ aléatoirement.
3. Calculer le point $M = kP$, puis $b = x_M \bmod q$.
4. Calculer $c = (h + ab)k^{-1} \bmod q$.
5. Si $b = 0$ ou $c = 0$, revenir à l'étape 2.
6. Sinon, retourner $s = (b, c)$.

Signature ECDSA : $\text{Sign}(\mathbf{m}, s\mathbf{k})$

1. Calculer $h = H(\mathbf{m})$.
2. Choisir $k \in \{1, \dots, q-1\}$ aléatoirement.
3. Calculer le point $M = kP$, puis $b = x_M \bmod q$.
4. Calculer $c = (h + ab)k^{-1} \bmod q$.
5. Si $b = 0$ ou $c = 0$, revenir à l'étape 2.
6. Sinon, retourner $s = (b, c)$.

Signature ECDSA : $\text{Verif}(\mathbf{m}, s, p\mathbf{k})$

1. Calculer $h = H(\mathbf{m})$.
2. Calculer le point $Q = h(c^{-1} \bmod q)P \oplus (bc^{-1} \bmod q)A$, ainsi que son abscisse x_Q .
3. Faire le test $x_Q \equiv b \bmod q$ et retourner le booléen associé.

Signature ECDSA : $\text{Sign}(\mathbf{m}, \text{sk})$

1. Calculer $h = H(\mathbf{m})$.
2. Choisir $k \in \{1, \dots, q-1\}$ aléatoirement.
3. Calculer le point $M = kP$, puis $b = x_M \bmod q$.
4. Calculer $c = (h + ab)k^{-1} \bmod q$.
5. Si $b = 0$ ou $c = 0$, revenir à l'étape 2.
6. Sinon, retourner $s = (b, c)$.

Signature ECDSA : $\text{Verif}(\mathbf{m}, s, \text{pk})$

1. Calculer $h = H(\mathbf{m})$.
2. Calculer le point $Q = h(c^{-1} \bmod q)P \oplus (bc^{-1} \bmod q)A$, ainsi que son abscisse x_Q .
3. Faire le test $x_Q \equiv b \bmod q$ et retourner le booléen associé.

Sécurité essentiellement identique à DSA.

Signature ECDSA : $\text{Sign}(\mathbf{m}, s\mathbf{k})$

1. Calculer $h = H(\mathbf{m})$.
2. Choisir $k \in \{1, \dots, q-1\}$ aléatoirement.
3. Calculer le point $M = kP$, puis $b = x_M \bmod q$.
4. Calculer $c = (h + ab)k^{-1} \bmod q$.
5. Si $b = 0$ ou $c = 0$, revenir à l'étape 2.
6. Sinon, retourner $s = (b, c)$.

Signature ECDSA : $\text{Verif}(\mathbf{m}, s, p\mathbf{k})$

1. Calculer $h = H(\mathbf{m})$.
2. Calculer le point $Q = h(c^{-1} \bmod q)P \oplus (bc^{-1} \bmod q)A$, ainsi que son abscisse x_Q .
3. Faire le test $x_Q \equiv b \bmod q$ et retourner le booléen associé.

Sécurité essentiellement identique à DSA.

Avantage : taille de la clé publique 2048 bits \rightarrow 224 bits.

Signature ECDSA : $\text{Sign}(\mathbf{m}, \text{sk})$

1. Calculer $h = H(\mathbf{m})$.
2. Choisir $k \in \{1, \dots, q-1\}$ aléatoirement.
3. Calculer le point $M = kP$, puis $b = x_M \bmod q$.
4. Calculer $c = (h + ab)k^{-1} \bmod q$.
5. Si $b = 0$ ou $c = 0$, revenir à l'étape 2.
6. Sinon, retourner $s = (b, c)$.

Signature ECDSA : $\text{Verif}(\mathbf{m}, s, \text{pk})$

1. Calculer $h = H(\mathbf{m})$.
2. Calculer le point $Q = h(c^{-1} \bmod q)P \oplus (bc^{-1} \bmod q)A$, ainsi que son abscisse x_Q .
3. Faire le test $x_Q \equiv b \bmod q$ et retourner le booléen associé.

Sécurité essentiellement identique à DSA.

Avantage : taille de la clé publique 2048 bits \rightarrow 224 bits.

Inconvénient : un peu plus lent (à modérer).

Beaucoup d'**autres signatures** existent.

- Signature de **Schnorr** (voir plus tard, après avoir introduit les schémas d'identification).
- Signatures à base de **fonctions de hachage** (ex : signature de Lamport), ne reposent pas sur des problèmes de théorie des nombres.
- Signatures **post-quantiques**, notamment fondées sur des problèmes sur les réseaux euclidiens, systèmes multivariés, codes correcteurs, isogénies, ... (voir séances sur la cryptographie post-quantique).

1. Schémas de signature

Rappels succincts
Signature ElGamal
DSA et ECDSA

2. Applications

Certification
Chiffrement à clef publique authentifié

1. Schémas de signature

Rappels succincts
Signature ElGamal
DSA et ECDSA

2. Applications

Certification
Chiffrement à clef publique authentifié

Contexte. Alice et Bob font partie d'un grand réseau de communication, dans lequel chaque participant engendre une paire de clefs publique/privée (pour du chiffrement ou de la signature).

Contexte. Alice et Bob font partie d'un grand réseau de communication, dans lequel chaque participant engendre une paire de clefs publique/privée (pour du chiffrement ou de la signature).

Les clefs publiques sont émises publiquement. Pour valider ces clefs, on a besoin d'une **infrastructure à clef publique** (*public-key infrastructure*, PKI).

Contexte. Alice et Bob font partie d'un grand réseau de communication, dans lequel chaque participant engendre une paire de clefs publique/privée (pour du chiffrement ou de la signature).

Les clefs publiques sont émises publiquement. Pour valider ces clefs, on a besoin d'une **infrastructure à clef publique** (*public-key infrastructure, PKI*).

Une solution est d'adopter d'une **autorité de certification** (*certification authority, CA*).

- C'est un organisme externe auquel tout participant fait confiance.
- Cette autorité va produire des **certificats** d'authenticité, par exemple pour les clefs publiques des utilisateurs.

Contexte. Alice et Bob font partie d'un grand réseau de communication, dans lequel chaque participant engendre une paire de clefs publique/privée (pour du chiffrement ou de la signature).

Les clefs publiques sont émises publiquement. Pour valider ces clefs, on a besoin d'une **infrastructure à clef publique** (*public-key infrastructure*, PKI).

Une solution est d'adopter d'une **autorité de certification** (*certification authority*, CA).

- C'est un organisme externe auquel tout participant fait confiance.
- Cette autorité va produire des **certificats** d'authenticité, par exemple pour les clefs publiques des utilisateurs.

Autres types de PKI :

Contexte. Alice et Bob font partie d'un grand réseau de communication, dans lequel chaque participant engendre une paire de clefs publique/privée (pour du chiffrement ou de la signature).

Les clefs publiques sont émises publiquement. Pour valider ces clefs, on a besoin d'une **infrastructure à clef publique** (*public-key infrastructure*, PKI).

Une solution est d'adopter d'une **autorité de certification** (*certification authority*, CA).

- C'est un organisme externe auquel tout participant fait confiance.
- Cette autorité va produire des **certificats** d'authenticité, par exemple pour les clefs publiques des utilisateurs.

Autres types de PKI :

- **Toile de confiance** (*web of trust*), utilisé dans PGP (*pretty good privacy*) : modèle complètement décentralisé où chaque entité peut certifier les clefs d'autres entités.

Contexte. Alice et Bob font partie d'un grand réseau de communication, dans lequel chaque participant engendre une paire de clefs publique/privée (pour du chiffrement ou de la signature).

Les clefs publiques sont émises publiquement. Pour valider ces clefs, on a besoin d'une **infrastructure à clef publique** (*public-key infrastructure*, PKI).

Une solution est d'adopter d'une **autorité de certification** (*certification authority*, CA).

- C'est un organisme externe auquel tout participant fait confiance.
- Cette autorité va produire des **certificats** d'authenticité, par exemple pour les clefs publiques des utilisateurs.

Autres types de PKI :

- **Toile de confiance** (*web of trust*), utilisé dans PGP (*pretty good privacy*) : modèle complètement décentralisé où chaque entité peut certifier les clefs d'autres entités.
- SPKI et PKI décentralisées : l'idée est de *moins* dépendre d'un seul groupe d'autorités de confiance (souvent des organismes à but commercial)

Contexte. Alice et Bob font partie d'un grand réseau de communication, dans lequel chaque participant engendre une paire de clefs publique/privée (pour du chiffrement ou de la signature).

Les clefs publiques sont émises publiquement. Pour valider ces clefs, on a besoin d'une **infrastructure à clef publique** (*public-key infrastructure*, PKI).

Une solution est d'adopter d'une **autorité de certification** (*certification authority*, CA).

- C'est un organisme externe auquel tout participant fait confiance.
- Cette autorité va produire des **certificats** d'authenticité, par exemple pour les clefs publiques des utilisateurs.

Autres types de PKI :

- **Toile de confiance** (*web of trust*), utilisé dans PGP (*pretty good privacy*) : modèle complètement décentralisé où chaque entité peut certifier les clefs d'autres entités.
- SPKI et PKI décentralisées : l'idée est de *moins* dépendre d'un seul groupe d'autorités de confiance (souvent des organismes à but commercial)
- Plus récemment, et à relativiser : *blockchains* (ex : CertCoin).

Un **certificat** est une structure de données reliant

- l' **identité** d'une personne (ex : nom, adresse email, etc.),
- une **information** à certifier (ex : une clef publique),
- et la **signature** d'une autorité de confiance.

Un **certificat** est une structure de données reliant

- l' **identité** d'une personne (ex : nom, adresse email, etc.),
- une **information** à certifier (ex : une clef publique),
- et la **signature** d'une autorité de confiance.

On peut y ajouter des informations additionnelles.

Un **certificat** est une structure de données reliant

- l' **identité** d'une personne (ex : nom, adresse email, etc.),
- une **information** à certifier (ex : une clef publique),
- et la **signature** d'une autorité de confiance.

On peut y ajouter des informations additionnelles.

Exemple. La norme X.509 est utilisée pour les certificats dans TLS/SSL (protocoles de sécurisation).

Un **certificat** est une structure de données reliant

- l' **identité** d'une personne (ex : nom, adresse email, etc.),
- une **information** à certifier (ex : une clef publique),
- et la **signature** d'une autorité de confiance.

On peut y ajouter des informations additionnelles.

Exemple. La norme X.509 est utilisée pour les certificats dans TLS/SSL (protocoles de sécurisation). La structure de données contient (dans le désordre) :

- L'identifiant du signataire et/ou du détenteur du certificat
- Algorithme de chiffrement
- Clé publique
- La signature de l'émetteur du certificat
- La version du certificat
- Le numéro de série
- Le nom de l'autorité de certification
- La date de début et de fin de validité
- L'objet de l'utilisation du certificat
- Les extensions au certificat
- L'algorithme de signature

L'**autorité de certification** (CA) émet publiquement un algorithme Verif_{CA} de vérification de sa signature. Elle garde secrètement l'algorithme de signature associé Sign_{CA} .

L'**autorité de certification** (CA) émet publiquement un algorithme Verif_{CA} de vérification de sa signature. Elle garde secrètement l'algorithme de signature associé Sign_{CA} .

Supposons qu'Alice veuille **faire certifier une clé publique**. Deux cas possibles :

L'**autorité de certification** (CA) émet publiquement un algorithme Verif_{CA} de vérification de sa signature. Elle garde secrètement l'algorithme de signature associé Sign_{CA} .

Supposons qu'Alice veuille **faire certifier une clé publique**. Deux cas possibles :

1. C'est l'autorité de certification (CA) qui crée la paire de clefs. Puis la CA transmet la clé privée sk_A à Alice par un moyen sécurisé, authentifié et privé.

L'**autorité de certification** (CA) émet publiquement un algorithme Verif_{CA} de vérification de sa signature. Elle garde secrètement l'algorithme de signature associé Sign_{CA} .

Supposons qu'Alice veuille **faire certifier une clé publique**. Deux cas possibles :

1. C'est l'autorité de certification (CA) qui crée la paire de clefs. Puis la CA transmet la clé privée sk_A à Alice par un moyen sécurisé, authentifié et privé.
2. C'est Alice qui crée la paire de clefs. Puis elle transmet la clef publique pk_A à la CA par un moyen sécurisé. Alice fournit également une **preuve de connaissance de la clé privée**.

L'**autorité de certification** (CA) émet publiquement un algorithme Verif_{CA} de vérification de sa signature. Elle garde secrètement l'algorithme de signature associé Sign_{CA} .

Supposons qu'Alice veuille **faire certifier une clé publique**. Deux cas possibles :

1. C'est l'autorité de certification (CA) qui crée la paire de clefs. Puis la CA transmet la clé privée sk_A à Alice par un moyen sécurisé, authentifié et privé.
2. C'est Alice qui crée la paire de clefs. Puis elle transmet la clé publique pk_A à la CA par un moyen sécurisé. Alice fournit également une **preuve de connaissance de la clé privée**.

Dans tous les cas, la clé publique pk_A est ensuite **certifiée** par la CA. Si $\text{ID}(\text{Alice})$ représente l'identité d'Alice :

$$\begin{cases} s = \text{Sign}_{CA}(\text{ID}(\text{Alice}) \parallel pk_A) \\ \text{CERT}(\text{Alice}, pk_A) = [\text{ID}(\text{Alice}) \parallel pk_A \parallel s] \end{cases}$$

L'**autorité de certification** (CA) émet publiquement un algorithme Verif_{CA} de vérification de sa signature. Elle garde secrètement l'algorithme de signature associé Sign_{CA} .

Supposons qu'Alice veuille **faire certifier une clé publique**. Deux cas possibles :

1. C'est l'autorité de certification (CA) qui crée la paire de clefs. Puis la CA transmet la clé privée sk_A à Alice par un moyen sécurisé, authentifié et privé.
2. C'est Alice qui crée la paire de clefs. Puis elle transmet la clef publique pk_A à la CA par un moyen sécurisé. Alice fournit également une **preuve de connaissance de la clé privée**.

Dans tous les cas, la clef publique pk_A est ensuite **certifiée** par la CA. Si $\text{ID}(\text{Alice})$ représente l'identité d'Alice :

$$\begin{cases} s = \text{Sign}_{CA}(\text{ID}(\text{Alice}) \parallel pk_A) \\ \text{CERT}(\text{Alice}, pk_A) = [\text{ID}(\text{Alice}) \parallel pk_A \parallel s] \end{cases}$$

Puis, lorsque Bob souhaite **vérifier la certification**, il vérifie simplement que

$$\text{Verif}_{CA}(s, \text{ID}(\text{Alice}) \parallel pk_A) = \text{true}$$

Exemple en ligne

1. Schémas de signature

Rappels succincts
Signature ElGamal
DSA et ECDSA

2. Applications

Certification
Chiffrement à clef publique authentifié

Une première proposition de chiffrement authentifié

Objectif. Alice veut envoyer un message m chiffré et **authentifié** à Bob (= Bob est convaincu que c'est bien Alice qui a produit le message).

Objectif. Alice veut envoyer un message m chiffré et **authentifié** à Bob (= Bob est convaincu que c'est bien Alice qui a produit le message).

Notation.

- $\text{Enc}_B/\text{Dec}_B$ sont les algorithmes de chiffrement public / déchiffrement privé de Bob.
- $\text{Sign}_A/\text{Verif}_A$ sont les algorithmes de signature privé / vérification publique d'Alice.

Objectif. Alice veut envoyer un message m chiffré et **authentifié** à Bob (= Bob est convaincu que c'est bien Alice qui a produit le message).

Notation.

- Enc_B/Dec_B sont les algorithmes de chiffrement public / déchiffrement privé de Bob.
- $Sign_A/Verif_A$ sont les algorithmes de signature privé / vérification publique d'Alice.

Première idée (*sign-and-encrypt*) :

1. Alice signe $s = Sign_A(m)$.
2. Alice calcule $c = Enc_B(m \parallel s)$ et envoie c à Bob.
3. Bob déchiffre $Dec_B(c) = m \parallel s$ puis vérifie que $Verif_A(m, s) = \text{true}$.

Objectif. Alice veut envoyer un message m chiffré et **authentifié** à Bob (= Bob est convaincu que c'est bien Alice qui a produit le message).

Notation.

- Enc_B/Dec_B sont les algorithmes de chiffrement public / déchiffrement privé de Bob.
- $Sign_A/Verif_A$ sont les algorithmes de signature privé / vérification publique d'Alice.

Première idée (*sign-and-encrypt*) :

1. Alice signe $s = Sign_A(m)$.
2. Alice calcule $c = Enc_B(m \parallel s)$ et envoie c à Bob.
3. Bob déchiffre $Dec_B(c) = m \parallel s$ puis vérifie que $Verif_A(m, s) = \text{true}$.

Problème. Bob lui-même peut briser l'authentification du message, en **réutilisant la signature** :

Objectif. Alice veut envoyer un message m chiffré et **authentifié** à Bob (= Bob est convaincu que c'est bien Alice qui a produit le message).

Notation.

- Enc_B/Dec_B sont les algorithmes de chiffrement public / déchiffrement privé de Bob.
- $Sign_A/Verif_A$ sont les algorithmes de signature privé / vérification publique d'Alice.

Première idée (*sign-and-encrypt*) :

1. Alice signe $s = Sign_A(m)$.
2. Alice calcule $c = Enc_B(m \parallel s)$ et envoie c à Bob.
3. Bob déchiffre $Dec_B(c) = m \parallel s$ puis vérifie que $Verif_A(m, s) = \text{true}$.

Problème. Bob lui-même peut briser l'authentification du message, en **réutilisant la signature** :

1. Bob déchiffre $Dec_B(c) = m \parallel s$, puis chiffre $m \parallel s$ avec l'algorithme de chiffrement Enc_C public associé à Charlie, une autre personne.
2. Charlie croit que Alice lui a envoyé un message $Enc_C(m \parallel s)$, car après déchiffrement la signature s est celle d'Alice

Seconde idée (*encrypt-and-sign*) :

1. Alice calcule $c = \text{Enc}_B(\mathbf{m})$.
2. Alice signe $s = \text{Sign}_A(c)$ et envoie (c, s) à Bob.
3. Bob vérifie la signature $\text{Verif}_B(c, s) = \text{true}$ puis déchiffre $\text{Dec}_B(c) = \mathbf{m}$.

Seconde idée (*encrypt-and-sign*) :

1. Alice calcule $c = \text{Enc}_B(\mathbf{m})$.
2. Alice signe $s = \text{Sign}_A(c)$ et envoie (c, s) à Bob.
3. Bob vérifie la signature $\text{Verif}_B(c, s) = \text{true}$ puis déchiffre $\text{Dec}_B(c) = \mathbf{m}$.

Problème. Oscar peut procéder à une attaque par le milieu :

1. Oscar observe (c, s) et remplace s par sa signature $s' = \text{Sign}_O(c)$.
2. Oscar envoie (c, s') à Bob et lui fait croire que le message \mathbf{m} est le sien...

Seconde idée (*encrypt-and-sign*) :

1. Alice calcule $c = \text{Enc}_B(\mathbf{m})$.
2. Alice signe $s = \text{Sign}_A(c)$ et envoie (c, s) à Bob.
3. Bob vérifie la signature $\text{Verif}_B(c, s) = \text{true}$ puis déchiffre $\text{Dec}_B(c) = \mathbf{m}$.

Problème. Oscar peut procéder à une attaque par le milieu :

1. Oscar observe (c, s) et remplace s par sa signature $s' = \text{Sign}_O(c)$.
2. Oscar envoie (c, s') à Bob et lui fait croire que le message \mathbf{m} est le sien...

Remarque : dans ce cas, Oscar ne connaît pas le message \mathbf{m} .

À Alice et Bob sont associés des identifiants publics ID_A et ID_B .

PROTOCOLE « SIGN-THEN-ENCRYPT »

À Alice et Bob sont associés des identifiants publics ID_A et ID_B .

PROTOCOLE « SIGN-THEN-ENCRYPT »

Pour envoyer un message authentifié m à Bob, Alice :

1. calcule une signature $s = \text{Sign}_A(m \parallel ID_B)$
2. calcule un chiffré $c = \text{Enc}_B(m \parallel s \parallel ID_A)$

À Alice et Bob sont associés des identifiants publics ID_A et ID_B .

PROTOCOLE « SIGN-THEN-ENCRYPT »

Pour envoyer un message authentifié m à Bob, Alice :

1. calcule une signature $s = \text{Sign}_A(m \parallel ID_B)$
2. calcule un chiffré $c = \text{Enc}_B(m \parallel s \parallel ID_A)$

Pour déchiffrer et authentifier le message reçu c , Bob :

1. déchiffre $\text{Dec}_B(c) = m \parallel s \parallel ID_A$
2. reconnaît l'identité d'Alice dans le message déchiffré
3. vérifie la signature associée est correcte $\text{Verif}_A(m \parallel ID_B, s) = \text{true}$.

À Alice et Bob sont associés des identifiants publics ID_A et ID_B .

PROTOCOLE « SIGN-THEN-ENCRYPT »

Pour envoyer un message authentifié m à Bob, Alice :

1. calcule une signature $s = \text{Sign}_A(m \parallel ID_B)$
2. calcule un chiffré $c = \text{Enc}_B(m \parallel s \parallel ID_A)$

Pour déchiffrer et authentifier le message reçu c , Bob :

1. déchiffre $\text{Dec}_B(c) = m \parallel s \parallel ID_A$
2. reconnaît l'identité d'Alice dans le message déchiffré
3. vérifie la signature associée est correcte $\text{Verif}_A(m \parallel ID_B, s) = \text{true}$.

La première attaque ne fonctionne plus, car Alice a lié sa signature s à l'identité du destinataire, Bob.

À Alice et Bob sont associés des identifiants publics ID_A et ID_B .

PROTOCOLE « ENCRYPT-THEN-SIGN »

À Alice et Bob sont associés des identifiants publics ID_A et ID_B .

PROTOCOLE « ENCRYPT-THEN-SIGN »

Pour envoyer un message authentifié m à Bob, Alice :

1. calcule un chiffré $c = \text{Enc}_B(m \parallel ID_A)$,
2. signe $s = \text{Sign}_A(c \parallel ID_B)$ et envoie (c, s, ID_A) à Bob.

À Alice et Bob sont associés des identifiants publics ID_A et ID_B .

PROTOCOLE « ENCRYPT-THEN-SIGN »

Pour envoyer un message authentifié m à Bob, Alice :

1. calcule un chiffré $c = \text{Enc}_B(m \parallel ID_A)$,
2. signe $s = \text{Sign}_A(c \parallel ID_B)$ et envoie (c, s, ID_A) à Bob.

Pour déchiffrer et authentifier le message reçu, Bob :

1. vérifie que $\text{Verif}_A(c \parallel ID_B, s)$,
2. déchiffre c et obtient m et l'identité ID_A ,
3. vérifie que l'identité correspond à ce qu'il a reçu précédemment.

À Alice et Bob sont associés des identifiants publics ID_A et ID_B .

PROTOCOLE « ENCRYPT-THEN-SIGN »

Pour envoyer un message authentifié m à Bob, Alice :

1. calcule un chiffré $c = \text{Enc}_B(m \parallel ID_A)$,
2. signe $s = \text{Sign}_A(c \parallel ID_B)$ et envoie (c, s, ID_A) à Bob.

Pour déchiffrer et authentifier le message reçu, Bob :

1. vérifie que $\text{Verif}_A(c \parallel ID_B, s)$,
2. déchiffre c et obtient m et l'identité ID_A ,
3. vérifie que l'identité correspond à ce qu'il a reçu précédemment.

La seconde attaque ne fonctionne plus, car Oscar ne peut pas intégrer son identité personnelle ID_O au chiffré c afin de prétendre avoir chiffré le message m .

Questions ?