Université Paris 8 | Licence 2 Mathématiques | année 2025–26 | J. Lavauzelle

Logiciel de calcul formel | Interrogation écrite 4 | 09/04/2026 | Sujet A 0

**Aucun document** et **aucun dispositif électronique** n'est autorisé — **Durée :** 30 min.

**Nom :** **Prénom :**

## Exercice 1. QCM.

Dans ce questionnaire à choix multiples, une seule réponse est correcte. **Cochez la bonne réponse**.
**Barème indicatif :** réponse correcte 1 pt ; pas de réponse 0 pt ; réponse fausse $-0.5$ pt.

**(Q1)** Supposons qu'un polynôme `B` à coefficients rationnels a été déclaré. Comment obtient-on le coefficient du monôme de degré 2 ?

- ■ `B[2]`
- ☐ `B.coefficient(2)`
- ☐ `B(2)`

**(Q2)** Supposons qu'un polynôme `P` à coefficients entiers a été déclaré. Comment obtient-on ses racines sur $\mathbb{Q}$ ?

- ☐ `QQ(P.roots())`
- ☐ `P.rational_roots()`
- ■ `P.roots(QQ)`

## Exercice 2. Questions courtes.

**Question 1.–** Donner la (ou les) instructions(s) qui permettent de stocker dans une variable `B` l'anneau $\mathbb{Z}[X]$ des polynômes à coefficients entiers, et dans `X` la variable associée.

```
B = PolynomialRing(ZZ, "X")
X = B.gen()
```

**Question 2.–** On suppose que la variable `t` a déjà été déclarée. Donner une commande qui permet de calculer

$$\lim_{t \to -\infty} \frac{e^t}{t}.$$

```
limit(exp(t)/t, t=-oo)
```

**Question 3.–** On suppose que la variable `t` a déjà été déclarée. Donner une commande qui permet de calculer

$$\int_0^{\pi/5} \cos\left(\tfrac{t}{2}\right) dt.$$

```
integral(cos(t/2), t, 0, pi/5)
```

**Question 4.–** Donner deux instructions : la première qui crée un symbole `j` ; la deuxième qui calcule la somme suivante

$$\sum_{j=0}^{10} \ln(1+j^2).$$

```
var('j')
sum(ln(1+j**2), j, 0, 10)
```

**Question 5.–** Donner une commande qui permet de calculer la dérivée d'une fonction représentée par une expression symbolique `f`, selon une variable `x`.

```
diff(f, x)
```

## Exercice 3. Suite de polynômes.

**Question 1.–** On suppose que des variables `A` et `X` ont déjà été déclarées, et contiennent respectivement l'anneau des polynômes $\mathbb{Q}[X]$ et la variable $X$ associée. Écrire une fonction `suite_polynomes(n)` qui prend en entrée un entier naturel $n$, et qui retourne le terme d'indice $n$ de la suite de polynômes $(Q_n(X))_{n\geq 0}$ définie par :

$$Q_0(X) = -X+2, \quad \text{et} \quad Q_{n+1}(X) = \frac{1}{2}Q_n(X+1) - nX^2, \quad \forall n \geq 0$$

```
def suite_polynomes(n):
    Q = - X + 2
    for i in range(n):
        Q = (1/2) * Q(X+1) - i*X**2
    return Q
```

## Exercice 4. Ordre de divisibilité.

**Question 1.–** Soient $P(X)$ et $Q(X)$ deux polynômes, avec $\deg(Q(X)) \geq 1$. L'ordre de divisibilité de $P(X)$ par $Q(X)$ est le plus grand entier naturel $n$ tel que $Q(X)^n$ divise $P(X)$.

Écrire une fonction `ordre_divisibilite(P, Q)` qui prend en entrée deux polynômes `P` et `Q` définis dans le même anneau de polynômes. Si `Q` est de degré $\geq 1$, la fonction doit retourner l'ordre de divisibilité de `P` par `Q`. Sinon, elle doit afficher le message `"Erreur !"`, puis retourner le mot-clef `None`.

```
def ordre_divisibilite(P, Q):
    if Q.degree() == 0:
        print("Erreur !")
        return None
    R = P
    n = 0
    while R % Q == 0:
        R = R // Q:
        n += 1
    return n
```

Université Paris 8 | Licence 2 Mathématiques | année 2025–26 | J. Lavauzelle

Logiciel de calcul formel | Interrogation écrite 4 | 09/04/2026 | Sujet B 0

**Aucun document** et **aucun dispositif électronique** n'est autorisé — **Durée :** 30 min.

**Nom :** **Prénom :**

## Exercice 1. QCM.

Dans ce questionnaire à choix multiples, une seule réponse est correcte. **Cochez la bonne réponse**.
**Barème indicatif :** réponse correcte 1 pt ; pas de réponse 0 pt ; réponse fausse −0.5 pt.

**(Q1)** Supposons qu'un polynôme `A` à coefficients rationnels a été déclaré. Comment obtient-on son degré ?

- ■ `A.degree()`
- ☐ `deg(A)`
- ☐ `A.deg()`

**(Q2)** Supposons qu'un polynôme `P` à coefficients entiers a été déclaré. Comment obtient-on ses racines sur $\mathbb{Q}$ ?

- ☐ `QQ(P.roots())`
- ☐ `P.rational_roots()`
- ■ `P.roots(QQ)`

## Exercice 2. Questions courtes.

**Question 1.–** Donner la (ou les) instructions(s) qui permettent de stocker dans une variable `A` l'anneau $\mathbb{Q}[Y]$ des polynômes à coefficients rationnels, et dans `Y` la variable associée.

```
A = PolynomialRing(QQ, "Y")
Y = A.gen()
```

**Question 2.–** On suppose que la variable `t` a déjà été déclarée. Donner une commande qui permet de calculer

$$\lim_{t\to 2} \frac{1}{t^2-4}.$$

```
limit(1/(t**2-4), t=2)
```

**Question 3.–** On suppose que la variable `t` a déjà été déclarée. Donner une commande qui permet de calculer

$$\int_{-1}^{1} \ln(t^2+2)dt.$$

```
integral(ln(t**2+2), t, -1, 1)
```

**Question 4.–** Donner deux instructions : la première qui crée un symbole `m` ; la deuxième qui calcule la somme suivante

$$\sum_{m=0}^{100} e^{1/m}.$$

```
var('m')
sum(exp(1/m), m, 0, 100)
```

**Question 5.–** Donner une commande qui permet de calculer la dérivée d'une fonction représentée par une expression symbolique `f`, selon une variable `x`.

```
diff(f, x)
```

## Exercice 3. Suite de polynômes.

**Question 1.–** On suppose que des variables `A` et `X` ont déjà été déclarées, et contiennent respectivement l'anneau des polynômes $\mathbb{Q}[X]$ et la variable $X$ associée. Écrire une fonction `suite_polynomes(n)` qui prend en entrée un entier naturel $n$, et qui retourne le terme d'indice $n$ de la suite de polynômes $(S_n(X))_{n\geq 0}$ définie par :

$$S_0(X) = \frac{1}{2}X, \quad \text{et} \quad S_{n+1}(X) = 2S_n(X^2) + n(X-1), \quad \forall n \geq 0$$

```python
def suite_polynomes(n):
    S = X/2
    for i in range(n):
        S = 2 * S(X**2) + i * (X-1)
    return S
```

## Exercice 4. Ordre de divisibilité.

**Question 1.–** Soient $P(X)$ et $Q(X)$ deux polynômes, avec $\deg(Q(X)) \geq 1$. L'ordre de divisibilité de $P(X)$ par $Q(X)$ est le plus grand entier naturel $n$ tel que $Q(X)^n$ divise $P(X)$.

Écrire une fonction `ordre_divisibilite(P, Q)` qui prend en entrée deux polynômes `P` et `Q` définis dans le même anneau de polynômes. Si `Q` est de degré $\geq 1$, la fonction doit retourner l'ordre de divisibilité de `P` par `Q`. Sinon, elle doit afficher le message `"Erreur !"`, puis retourner le mot-clef `None`.

```python
def ordre_divisibilite(P, Q):
    if Q.degree() == 0:
        print("Erreur !")
        return None
    R = P
    n = 0
    while R % Q == 0:
        R = R // Q:
        n += 1
    return n
```

Université Paris 8 — Licence 2 Mathématiques — année 2025–26 — J. Lavauzelle

Logiciel de calcul formel — Interrogation écrite 4 — 09/04/2026 — Sujet C 0

**Aucun document** et **aucun dispositif électronique** n'est autorisé — **Durée :** 30 min.

**Nom :** **Prénom :**

## Exercice 1. QCM.

Dans ce questionnaire à choix multiples, une seule réponse est correcte. **Cochez la bonne réponse**.
**Barème indicatif :** réponse correcte 1 pt ; pas de réponse 0 pt ; réponse fausse −0.5 pt.

**(Q1)** Supposons qu'un polynôme `B` à coefficients rationnels a été déclaré. Comment obtient-on le coefficient du monôme de degré 2 ?

- ■ `B[2]`
- ☐ `B.coefficient(2)`
- ☐ `B(2)`

**(Q2)** Supposons qu'un polynôme `P` à coefficients entiers a été déclaré. Comment obtient-on ses racines sur $\mathbb{Q}$ ?

- ☐ `QQ(P.roots())`
- ☐ `P.rational_roots()`
- ■ `P.roots(QQ)`

## Exercice 2. Questions courtes.

**Question 1.–** Donner la (ou les) instructions(s) qui permettent de stocker dans une variable `B` l'anneau $\mathbb{Z}[X]$ des polynômes à coefficients entiers, et dans `X` la variable associée.

```
B = PolynomialRing(ZZ, "X")
X = B.gen()
```

**Question 2.–** On suppose que la variable `t` a déjà été déclarée. Donner une commande qui permet de calculer

$$\lim_{t\to 0} \frac{\ln(1+t)}{t}.$$

```
limit(log(1+t)/t, t=0)
```

**Question 3.–** On suppose que la variable `t` a déjà été déclarée. Donner une commande qui permet de calculer

$$\int_0^1 e^{-t^2} dt.$$

```
integral(exp(-t**2), t, 0, 1)
```

**Question 4.–** Donner deux instructions : la première qui crée un symbole `k`; la deuxième qui calcule la somme suivante

$$\sum_{k=1}^{10} \sqrt{2k}.$$

```
var('k')
sum(sqrt(2k), k, 1, 10)
```

**Question 5.–** Donner une commande qui permet de calculer la dérivée d'une fonction représentée par une expression symbolique `f`, selon une variable `x`.

```
diff(f, x)
```

**Exercice 3. Suite de polynômes.**

**Question 1.–** On suppose que des variables `A` et `X` ont déjà été déclarées, et contiennent respectivement l'anneau des polynômes $\mathbb{Q}[X]$ et la variable $X$ associée. Écrire une fonction `suite_polynomes(n)` qui prend en entrée un entier naturel $n$, et qui retourne le terme d'indice $n$ de la suite de polynômes $(R_n(X))_{n\geq 0}$ définie par :

$$R_0(X) = X^2, \quad \text{et} \quad R_{n+1}(X) = -2R_n(X+3) + 3n(X+1), \quad \forall n \geq 0$$

```
def suite_polynomes(n):
    R = X**2
    for i in range(n):
        R = - 2 * R(X+3) + 3 * i * (X+1)
    return R
```

**Exercice 4. Ordre de divisibilité.**

**Question 1.–** Soient $P(X)$ et $Q(X)$ deux polynômes, avec $\deg(Q(X)) \geq 1$. L'ordre de divisibilité de $P(X)$ par $Q(X)$ est le plus grand entier naturel $n$ tel que $Q(X)^n$ divise $P(X)$.

Écrire une fonction `ordre_divisibilite(P, Q)` qui prend en entrée deux polynômes `P` et `Q` définis dans le même anneau de polynômes. Si `Q` est de degré $\geq 1$, la fonction doit retourner l'ordre de divisibilité de `P` par `Q`. Sinon, elle doit afficher le message `"Erreur !"`, puis retourner le mot-clef `None`.

```
def ordre_divisibilite(P, Q):
    if Q.degree() == 0:
        print("Erreur !")
        return None
    R = P
    n = 0
    while R % Q == 0:
        R = R // Q:
        n += 1
    return n
```

Université Paris 8 | Licence 2 Mathématiques | année 2025–26 | J. Lavauzelle

Logiciel de calcul formel | Interrogation écrite 4 | 09/04/2026 | Sujet D$_0$

**Aucun document** et **aucun dispositif électronique** n'est autorisé — **Durée :** 30 min.

**Nom :** **Prénom :**

## Exercice 1. QCM.

Dans ce questionnaire à choix multiples, une seule réponse est correcte. **Cochez la bonne réponse**.
**Barème indicatif :** réponse correcte 1 pt ; pas de réponse 0 pt ; réponse fausse $-0.5$ pt.

**(Q1)** Supposons qu'un polynôme `A` à coefficients rationnels a été déclaré. Comment obtient-on son degré ?

- ■ `A.degree()`
- ☐ `deg(A)`
- ☐ `A.deg()`

**(Q2)** Supposons qu'un polynôme `P` à coefficients entiers a été déclaré. Comment obtient-on ses racines sur $\mathbb{Q}$ ?

- ☐ `QQ(P.roots())`
- ☐ `P.rational_roots()`
- ■ `P.roots(QQ)`

## Exercice 2. Questions courtes.

**Question 1.–** Donner la (ou les) instructions(s) qui permettent de stocker dans une variable `A` l'anneau $\mathbb{Q}[Y]$ des polynômes à coefficients rationnels, et dans `Y` la variable associée.

```
A = PolynomialRing(QQ, "Y")
Y = A.gen()
```

**Question 2.–** On suppose que la variable `t` a déjà été déclarée. Donner une commande qui permet de calculer

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{\sin(t)}{t}.$$

```
limit(sin(t)/t, t=+oo)
```

**Question 3.–** On suppose que la variable `t` a déjà été déclarée. Donner une commande qui permet de calculer

$$\int_{-2}^{2} \frac{t^2}{t-3} dt.$$

```
integral(t**2/(t-3), t, -2, 2)
```

**Question 4.–** Donner deux instructions : la première qui crée un symbole `n`; la deuxième qui calcule la somme suivante

$$\sum_{n=1}^{100} \frac{1}{n^3}.$$

```
var('n')
sum(1/(n**3), n, 1, 100)
```

**Question 5.–** Donner une commande qui permet de calculer la dérivée d'une fonction représentée par une expression symbolique `f`, selon une variable `x`.

```
diff(f, x)
```

## Exercice 3. Suite de polynômes.

**Question 1.–** On suppose que des variables `A` et `X` ont déjà été déclarées, et contiennent respectivement l'anneau des polynômes $\mathbb{Q}[X]$ et la variable $X$ associée. Écrire une fonction `suite_polynomes(n)` qui prend en entrée un entier naturel $n$, et qui retourne le terme d'indice $n$ de la suite de polynômes $(P_n(X))_{n\geq 0}$ définie par :

$$P_0(X) = X + 1, \quad \text{et} \quad P_{n+1}(X) = XP_n(X-1) - 2nX, \quad \forall n \geq 0$$

```
def suite_polynomes(n):
    P = X + 1
    for i in range(n):
        P = X*P(X-1) - 2*i*X
    return P
```

## Exercice 4. Ordre de divisibilité.

**Question 1.–** Soient $P(X)$ et $Q(X)$ deux polynômes, avec $\deg(Q(X)) \geq 1$. L'ordre de divisibilité de $P(X)$ par $Q(X)$ est le plus grand entier naturel $n$ tel que $Q(X)^n$ divise $P(X)$.

Écrire une fonction `ordre_divisibilite(P, Q)` qui prend en entrée deux polynômes `P` et `Q` définis dans le même anneau de polynômes. Si `Q` est de degré $\geq 1$, la fonction doit retourner l'ordre de divisibilité de `P` par `Q`. Sinon, elle doit afficher le message `"Erreur !"`, puis retourner le mot-clef `None`.

```
def ordre_divisibilite(P, Q):
    if Q.degree() == 0:
        print("Erreur !")
        return None
    R = P
    n = 0
    while R % Q == 0:
        R = R // Q:
        n += 1
    return n
```