Tremplin Master – Devoir à rendre

donné le 21/03/2024
à rendre pour le 03/05/2024

Consignes :

1. C'est un travail à effectuer **individuellement**.
2. Vous devez rendre, pour le **vendredi 03 mai 2024** dernier délai, vos réponses aux questions listées dans le sujet ci-dessous. Vos réponses seront adressées par email à

   `julien.lavauzelle@univ-paris8.fr`

   dans une archive au format `.zip`, qui contiendra vos documents. Si besoin, vos réponses peuvent être rédigées dans plusieurs documents séparés, avec différents formats (par exemple : un fichier `.ipynb` pour vos implémentations, et un fichier `.pdf` pour les explications ou certaines réponses d'ordre théorique).
3. Ce que vous me rendez doit refléter un **travail personnel**. L'utilisation de ressources externes (humaines, ou informatiques telles que ChatGPT) doit être aussi limitée que possible. En particulier, vous **devez comprendre et savoir expliquer** toutes les réponses et toutes les lignes de code que vous aurez écrites. En cas de doute, je m'autorise à vous convoquer pour vérifier l'authenticité de votre travail.
4. Certaines questions (surtout vers la fin du devoir) sont volontairement laissées **ouvertes**. Cela vous laisse la liberté de faire vos propres expériences et de les commenter. Les prises d'initiatives sont donc bienvenues, et seront gratifiées si elles sont bien argumentées.

Propagation de feux de forêts

Dans ce devoir, on étudie deux modèles simples de **propagation de feux de forêts**.

Dans ces deux modèles, une forêt est modélisée par un graphe $G = (V, E)$, dont les sommets V sont les arbres de la forêt. On suppose que les arbres sont espacés régulièrement, sur les coordonnées des points d'une grille de taille $H \times L$.

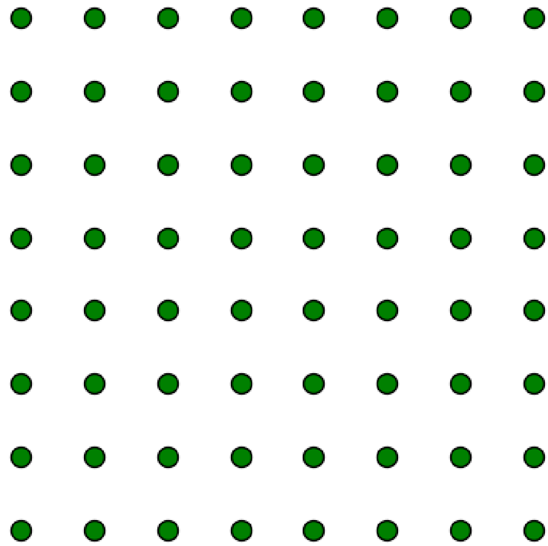

FIGURE 1 – Emplacement des arbres dans une forêt de taille 8×8

1 Premier modèle

Description du 1$^{\text{er}}$ modèle de propagation. Dans cette partie, on modélise le fait que le feu puisse (ou non) se propager d'un arbre à un autre par la présence (ou non) d'une arête entre deux sommets du graphe.

Une fois le graphe fixé, la propagation du feu est donc déterministe : elle suit les arêtes du graphe. En revanche, la **construction** du graphe et de ses arêtes sera, quand à elle, aléatoire.

Construction aléatoire d'une forêt. Cette construction peut se faire en partant d'une forêt modélisée par un graphe grille "complet" (c'est-à-dire, avec des arêtes entre chaque paire de sommets adjacents dans la grille), puis en lui retirant des arêtes avec une certaine probabilité. Plus formellement, on suppose que la probabilité que le feu puisse se propager entre l'arbre de coordonnées (i, j) et celui de coordonées (i', j') est donnée par la relation :

$$\mathbb{P}(((i,j),(i',j')) \in E) = \begin{cases} p & \text{si } |i'-i| + |j'-j| = 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

où $p \in [0, 1]$ est un paramètre réel. On appelera ce type de construction aléatoire une **forêt p-dense**.

Autrement dit, dans une forêt p-dense, le feu ne peut se propager **que** sur un arbre voisin immédiat, et cela avec probabilté p. Un exemple de graphe généré avec la probabilité $p = 0{,}3$ est donné en Figure 2.

Aide à l'implémentation. Avec Sagemath, la fonction `graphs.GridGraph([H, L])` vous permettra de créer un graphe grille "complet" de hauteur H et de largeur L. Ses sommets sont indexés par des couples (i, j), où $0 \leq i < H$ et $0 \leq j < L$. Une arête du graphe est donc un couple de couples : par exemple, l'arête $((0, 1),(1, 1))$ relie le sommet $(0, 1)$ et le sommet $(1, 1)$.

On n'oubliera pas certaines fonctions déjà vues en cours, qui seront très certainement utiles :

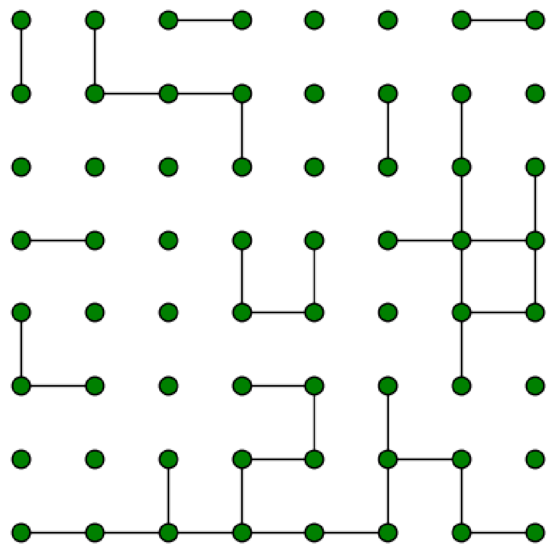

FIGURE 2 – Représentation de la propagation éventuelle du feu dans une forêt p-dense avec $p = 0{,}3$ (chaque arête permet la propagation d'un arbre à un autre).

- `G.delete_edge(e)` qui retire l'arête `e` du graphe `G`
- `X = GeneralDiscreteDistribution(L)` qui stocke dans `X` une variable aléatoire discrète dont la distribution est donnée par la liste `L`, et dont on peut ensuite tirer un élément par la méthode `X.get_random_element()`.

Question 1.– Écrire une fonction qui prend en entrée un paramètre de probabilité p, une hauteur H et une largeur L, et qui produit un graphe modélisant une forêt comme dans la description ci-dessus.

Lorsqu'un feu est allumé sur un arbre (i, j), il se propage sur tous les sommets adjecents à (i, j). Puis, la propagation se poursuit par induction. Autrement dit, l'ensemble des arbres qui seront touchés par un feu allumé en (i, j) correspond exactement à la **composante connexe du sommet** (i, j).

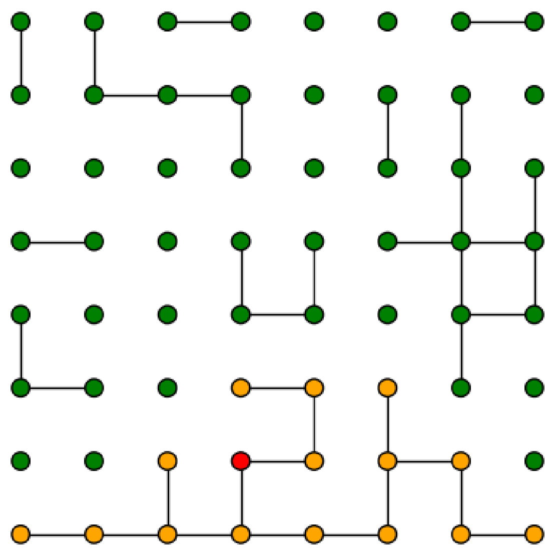

FIGURE 3 – Propagation d'un feu déclenché à la position $(6, 3)$ (en rouge), sur les autres arbres de sa composante connexe (en orange). Les autres arbres (en vert) restent intacts.

Question 2.– Trouver (ou implanter à partir d'algorithmes vus en cours) une fonction qui prend en paramètre un sommet d'un graphe, et qui retourne la composante connexe du graphe qui contient le sommet.

On considère qu'un feu **dévaste** la forêt s'il se propage sur au moins la moitié des arbres de la forêt.

Question 3.– Écrire une fonction qui prend en entrée le graphe d'une forêt et les coordonnées (i, j) d'un arbre, et qui teste si un feu déclaré en position (i, j) dévaste (ou non) la forêt.

On dit qu'une forêt est **fragile** s'il existe un arbre (i, j) tel que, si un feu est allumé en (i, j), alors le feu dévaste la forêt.

On appelle **seuil critique** la valeur limite $\tau \in [0, 1]$ pour laquelle :

— si $p < \tau$ alors la probabilité qu'une forêt p-dense tirée aléatoirement soit fragile est asymptotiquement proche de 0,

— si $p > \tau$ alors la probabilité qu'une forêt p-dense tirée aléatoirement soit fragile est asymptotiquement proche de 1.

La notion "asymptotiquement" se réfère à un nombre d'arbres important dans la forêt. En pratique, on prendra $HL \geq 1000$ pour rentrer dans ce cadre.

Question 4.– Par des expérimentations, estimer la valeur du seuil critique pour des forêts :

1. de taille carrée ($H = L$),
2. de taille rectangulaire avec un ratio hauteur/largeur de 1/20.

Puis, commenter la différence obtenue.

Indication. Pour estimer le seuil, on pourra (par exemple) construire des séries de 100 *forêts p-denses pour différentes valeurs de p parcourant l'intervalle* [0,1]. *Puis, on compte pour chaque valeur de p combien de forêts sont fragiles. Cela donnera une estimation de la probabilité qu'une telle forêt soit fragile.*

2 Second modèle

Dans cette partie, on s'interesse à un modèle de propagation légèrement plus évolué.

Description du 2^{nd} modèle de propagation. Dans ce modèle, le graphe sous-jacent est toujours un graphe "grille", mais cette fois on le suppose "complet". C'est-à-dire, la totalité des arêtes reliant deux sommets adjacents sur la grille sont présentes.

On suppose ensuite que chaque sommet du graphe peut être dans trois états distincts : indemne, enflammé, ou brûlé. À l'instant initial, le feu est allumé sur un sommet (i, j). Puis, à chaque pas de temps et pour chaque arbre (a, b) qui est **enflammé** :

— le feu s'éteint en (a, b) avec probabilité p : dans ce cas, l'arbre (a, b) devient **brûlé** ;

— pour chaque voisin (u, v) de (a, b) qui est **indemne**, l'arbre (u, v) devient **enflammé** avec probabilité q.

Lorsqu'au bout d'un certain temps, aucun sommet n'est dans l'état "enflammé", alors l'incendie s'arrête ; on peut ensuite analyser l'état de la forêt.

Question 1.– Écrire une fonction qui prend en entrée les probabilités p et q, un graphe et le sommet où est initialement allumé le feu, et qui modélise le processus de propagation du feu défini ci-dessus.

Question 2.– Supposons que $p = 0$ et que la forêt soit de forme carrée ($H = L$). Estimer, en fonction de l'origine de l'incendie, de H et de q, le temps moyen pour que la totalité de la forêt soit enflammée.

Question 3.– Pour une taille de grille raisonnable, estimer la proportion d'arbres brûlés à la fin de l'incendie pour :

1. différentes valeurs de p et q,
2. différentes origines de l'incendie.