Université Paris 8 J. Lavauzelle

Master 1 Mathématiques et applications — année 2023–24

Cryptographie à clé publique – Feuille de TD 7

11/03/2024

Le corrigé de certains exercices sera disponible à l'adresse suivante :

`https://lvzl.fr/teaching/2023-24/cp.html`

($\star$) exercice fondamental ($\star\star$) pour s'entraîner ($\star\star\star$) pour aller plus loin 💻 sur machine

Exercice 1. ($\star$) Un nouveau protocole d'identification ?.

Alice souhaite s'identifier auprès de Bob. On suppose qu'Alice et Bob détiennent un secret commun $\boldsymbol{x} \in \{0,1\}^t$, pour $t \geq 1$, qui doit servir à plusieurs identifications. Le protocole suivant est proposé :

1. Bob choisit une chaîne aléatoire $\boldsymbol{r} \in \{0,1\}^t$ et l'envoie à Alice
2. Alice calcule $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{r} \oplus \boldsymbol{x}$ et renvoie $\boldsymbol{y}$ à Bob.
3. Bob vérifie que $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{r} \oplus \boldsymbol{y}$.

Question 1.– Pourquoi ce protocole ne peut pas être utilisé pour plusieurs identifications ?

Question 2.– Quelle étape d'un protocole d'identification à trois passes manque t-il dans ce protocole ?

Exercice 2. ($\star\star$) Schéma d'identification de Feige–Fiat–Shamir.

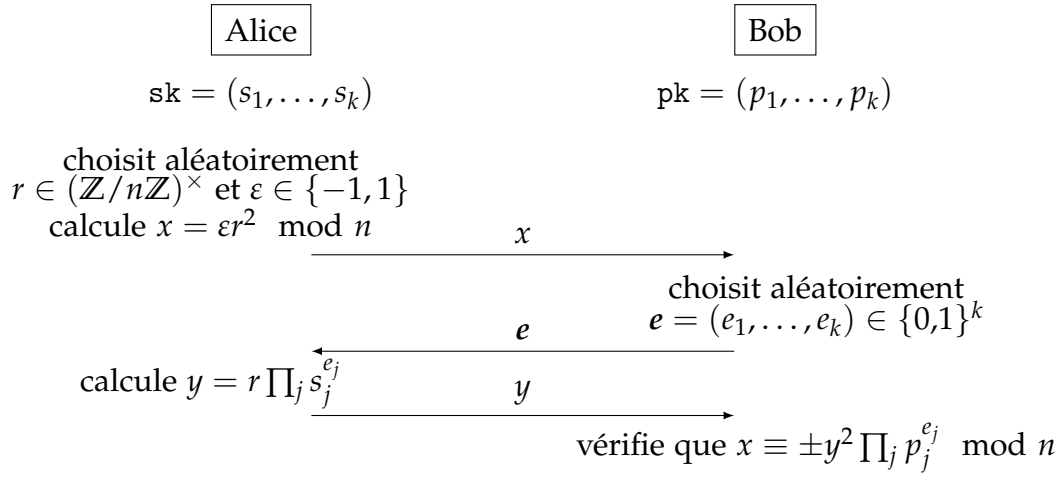
Dans cet exercice, on s'intéresse au schéma d'identification de Feige-Fiat-Shamir.

Dans le réseau de participants, une autorité de confiance choisit secrètement p et q deux grands nombres premiers, puis calcule et publie $n = pq$. On fixe ensuite k un entier, typiquement de taille $\log_2 \log_2 n$.

Alice, une utilisatrice du réseau, procède comme suit pour engendrer une paire de clefs :

1. Alice choisit aléatoirement $s_1, \ldots, s_k \in (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$.
2. Pour tout $j = 1, \ldots, k$, Alice choisit $\varepsilon_j \in \{-1, 1\}$ aléatoirement, puis calcule $p_j = \varepsilon_j / s_j^2$.
3. La clé publique d'Alice est $\mathtt{pk} = (p_1, \ldots, p_k)$, la clé privée d'Alice est $\mathtt{sk} = (s_1, \ldots, s_k)$.

Le protocole d'identification se déroule ainsi :



Question 1.– Démontrer que le protocole d'identification est valide.

Question 2.– Démontrer que, si un attaquant connaît le défi $\boldsymbol{e}$ de Bob **avant** de réaliser son engagement x, alors il peut monter une imposture. En déduire qu'il existe une attaque sur le système qui réussit avec probabilité 2^{-k}.

Question 3.– Selon vous, sur quel problème (difficile) repose la sécurité du schéma ? Donner une justification succincte.

Dans les questions suivantes, on cherche à démontrer que le protocole d'identification de Feige-Fiat-Shamir est une **preuve de connaissance à divulgation nulle**. Autrement dit, les itérations du protocole ne révèlent aucune information sur le secret `sk` d'Alice.

Pour obtenir cette propriété, l'idée est de démontrer que l'on peut simuler la distribution du transcript $(x, \boldsymbol{e}, y)$ sans la connaissance de `sk`.

Question 4.– On suppose que tous les tirages sont uniformes. Quelle loi suit la variable aléatoire y ?

On définit le **simulateur** de transcript suivant :

1. choisir uniformément $\boldsymbol{e}' = (e'_1, \ldots, e'_k) \in \{0,1\}^k$,
2. choisir uniformément $r' \in (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$ et $\epsilon' \in \{-1, 1\}$, puis calculer $x = \epsilon'(r')^2 \prod p_j^{e'_j} \mod n$,
3. définir $y' = r'$.

Question 5.– Démontrer que la loi de $(x', \boldsymbol{e}', y')$ induite par le simulateur est la même que celle de $(x, \boldsymbol{e}, y)$ issue du protocole d'identification. En déduire que le protocole est à divulgation nulle.