Université Paris 8 — Année 2022–23 — J. Lavauzelle

Master 1 Mathématiques et applications

Cryptographie à clé publique – Solutions feuille de TD 1

22/01/2024

Retrouvez le sujet du TD et d'autres exercices à l'adresse :

`https://lvzl.fr/teaching/2023-24/cp.html`

($\star$) exercice fondamental ($\star\star$) pour s'entraîner ($\star\star\star$) pour aller plus loin sur machine

Exercice 1. ($\star$) **Application du protocole de Diffie–Hellman.**

On exécute le protocole de Diffie–Hellman dans le groupe multiplicatif $\mathbb{G} = \mathbb{F}_p^\times$ avec les paramètres suivants :

- $p = 19$,
- le générateur du groupe est $g = 2$,
- la valeur secrète d'Alice est $a = 4$,
- la valeur secrète de Bob est $b = 6$.

Question 1.– Quelle est la valeur commune obtenue par Alice et Bob ?

On souhaite maintenant exécuter le protocole de Diffie–Hellman dans le sous-groupe des résidus quadratiques de $\mathbb{F}_p^\times$, que l'on note $\mathrm{QR}_p^\times$. Pour cela on garde la valeur $p = 19$.

Question 2.– L'élément $g = 2$ reste-t-il un générateur de $\mathrm{QR}_p^\times$?

Question 3.– Démontrer que 5 est un générateur de $\mathrm{QR}_p^\times$.

Question 4.– Exécuter le protocole de Diffie–Hellman dans $\mathrm{QR}_p^\times$ avec les valeurs suivantes :

- $p = 19$,
- $g = 5$,
- la valeur secrète d'Alice $a = 4$,
- la valeur secrète de Bob est $b = 6$.

Solutions de l'Exercice 1.

Solution Q1. La valeur commune est :

$$g^{ab} = 2^{4\times 6} \mod 19$$

Plus précisément, Bob reçoit $g^a = 2^4 = 16$ et opère

$$16^6 \equiv (-3)^6 \equiv 27^2 \equiv 8^2 \equiv 64 \equiv 7 \mod 19\,.$$

Solution Q2. **Premier argument.** Dans l'énoncé, on indique que 2 est un générateur de $\mathbb{F}_p^\times$. Son ordre est donc $p-1$, or s'il était générateur de $\mathrm{QR}_p^\times$, son ordre serait $(p-1/2$.

Second argument. On peut vérifier "à la main" que 2 n'est pas un résidu quadratique modulo p. D'après le critère d'Euler, cela revient à vérifier que $2^{(p-1)/2}$ vaut -1. Par le calcul, on a :

$$2^{(p-1)/2} = 2^9 = (2^4)^2 \times 2 = 16^2 \times 2 \equiv (-3)^2 \times 2 = 18 \equiv -1 \mod 19$$

Donc 2 n'est pas un résidu quadratique modulo p ; il ne peut donc pas en être un générateur.

Solution Q3. Tout d'abord, on vérifie que 5 est bien un carré modulo p. On a :

$$5^{(p-1)/2} = 5^9 = (5^2)^4 \times 5 \equiv 6^4 \times 5 = 36^2 \times 5 \equiv (-2)^2 \times 5 = 20 \equiv 1 \mod 19\,.$$

Donc $5 \in \mathrm{QR}_{19}^\times$. Pour démontrer que c'est un générateur de ce groupe, il faut montrer que son ordre est maximal, donc égal à $(p-1)/2 = 9$. Pour cela, il suffit ici de démontrer que $5^3 \not\equiv 1 \mod 19$, car les ordres possibles sont les diviseurs de 9. Or,

$$5^3 = 25 \times 5 \equiv 6 \times 5 = 30 \equiv 11 \mod 19\,.$$

donc 5 est bien un générateur de $\mathrm{QR}_{19}^\times$.

Solution Q4. Grâce aux calculs précédents, on obtient :

$$g^a = 5^4 \equiv -2 \mod 19 \quad \text{puis} \quad g^{ab} = (-2)^6 = 64 \equiv 7 \mod 19$$

Exercice 2. ($\star\star$) Protocole de Diffie–Hellman dans $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$.

On considère une variante additive du protocole de Diffie–Hellman dans le groupe fini $\mathbb{G} = (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$ où n est un très grand nombre entier. Pour cela, on fixe un générateur $M \neq 0$ du groupe $\mathbb{G}$, que l'on publie. Dans cette version « additive », le protocole devient donc :

Alice		Bob
engendre $a \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$		engendre $b \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$
	$u = aM \mod n$ $\longrightarrow$	
	$\longleftarrow$ $v = bM \mod n$	
calcule $av \mod n$		calcule $bu \mod n$

Question 1.– Donner une caractérisation simple des générateurs du groupe additif $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$. Puis, proposer un exemple de générateur qui convient pour tout entier $n \geq 2$.

Question 2.– Vérifier que le protocole est **valide**, c'est-à-dire que lorsqu'ils suivent le protocole ci-dessus, Alice et Bob détiennent bien un secret commun.

Question 3.– Rappeler un algorithme qui calcule l'inverse modulaire dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ (autrement dit, qui effectue l'opération $x \mapsto x^{-1} \mod n$). La complexité de cet algorithme est-elle polynomiale en $\log n$?

Question 4.– Selon vous, la variante du protocole de Diffie–Hellman proposée dans cet exercice est-elle sûre ? Justifier.

Solutions de l'Exercice 2.

Solution Q1. Les générateurs du groupe additif $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$ sont les entiers compris entre 1 et $n-1$ qui sont premiers avec n. Par exemple : 1.

Solution Q2. À la fin de l'exécution du protocole, Alice détient

$$av \equiv abM \mod n$$

et Bob détient

$$bu \equiv baM \mod n$$

Ces deux valeurs sont bien égales.

Solution Q3. Pour calculer l'inverse modulaire de x dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, l'algorithme est le suivant :

1. Exécuter l'algorithme d'Euclide étendu sur les entiers x et n, de manière à obtenir u et v tels que $xu + nv = 1$ (en effet, pour que x soit inversible modulo n, il faut que x et n soient premiers entre eux).
2. Retourner u.

La complexité de l'algorithme d'Euclide étendu est de $O(\log(n))$ opérations élémentaires (additions et multiplications modulo n). Le calcul de l'inverse modulaire est donc efficace.

Solution Q4. Le protocole n'est pas sûr. En effet, un attaquant peut simplement calculer l'inverse modulaire $M^{-1} \mod n$. Puis, comme aM est transmis d'Alice à Bob, l'attaquant obtient a en calculant $aM \times M^{-1} \mod n$. Ensuite, il lui suffit de calculer $a \times bM = abM \mod n$ (car bM est également connu de l'attaquant, car il est transmis de Bob à Alice).

Exercice 3. $(\star\star)$ Échange de clefs et masque jetable.

On note $\mathcal{X} = \mathbb{F}_2^n$ l'ensemble des chaînes de bits de longueur n, munies de l'opération de `xor` bit-à-bit, notée $\oplus$. On considère le protocole d'échange de clefs suivant.

Alice		Bob
engendre aléatoirement $k, r \in \mathcal{X}$		engendre aléatoirement $t \in \mathcal{X}$
	$s = k \oplus r \longrightarrow$	
	$\longleftarrow u = s \oplus t$	
	$v = u \oplus r \longrightarrow$	
détient k		détient $v \oplus t$

Question 1.– Vérifier qu'Alice et Bob détiennent bien un secret commun.

Question 2.– Le protocole est-il sûr ? Justifier.

Solutions de l'Exercice 3.

Solution Q1. À la fin de l'exécution du protocole, Alice détient la chaîne k et Bob détient

$$v \oplus t = u \oplus r \oplus t = s \oplus t \oplus r \oplus t = k \oplus r \oplus r = k\,.$$

C'est bien la même valeur.

Solution Q2. Alice et Bob s'échangent les données suivantes :

$$\begin{cases} s &= k \oplus r \\ u &= s \oplus t = k \oplus r \oplus t \\ v &= u \oplus r = k \oplus t \end{cases}$$

Un observateur qui a accès à ces données peut donc retrouver le secret commun k en calculant

$$s \oplus u \oplus v = 3k \oplus 2r \oplus 2t = k\,.$$

Exercice 4. ($\star\star$) Problèmes DH et sqDH.

Soit $\mathbb{G}$ un groupe cyclique de générateur g. On rappelle que le problème calculatoire de Diffie–Hellman dans $\mathbb{G}$ est :

$$\mathsf{CDH} : \text{étant donné } (g, g^a, g^b), \text{ calculer } g^{ab}.$$

On définit maintenant le problème de « Diffie–Hellman carré » dans $\mathbb{G}$ comme :

$$\mathsf{sqDH} : \text{étant donné } (g, g^a), \text{ calculer } g^{a^2}.$$

Question 1.– Expliquer en quoi sqDH peut être vu comme un sous-problème de CDH.

Question 2.– Supposons que l'on détienne un algorithme A qui résout efficacement sqDH. Démontrer qu'à partir d'une instance (g, g^a, g^b) de CDH, on peut calculer g^{2ab}.

Pour simplifier, on suppose ici que l'ordre r du groupe $\mathbb{G}$ est un entier impair et connu.

Question 3.– On dit que x est un carré dans $\mathbb{G}$ s'il existe un $y \in \mathbb{G}$ tel que $x = y^2$. Décrire un algorithme qui calcule une racine carrée d'un carré $x \in \mathbb{G}$.

Question 4.– En conclure que CDH se réduit à sqDH (dans le cas où l'ordre r est impair et connu).

Solutions de l'Exercice 4.

Solution Q1. Pour $a = b$, le problème CDH correspond à calculer g^{a^2} à partir de (g, g^a, g^a). C'est donc exactement sqDH.

Solution Q2. Soit A un algorithme qui résout sqDH. On souhaite résoudre une instance (g, g^a, g^b) de CDH, c'est-à-dire calculer g^{ab} à partir de ces valeurs.

Observons que l'on peut calculer les valeurs suivantes :

- g^{a^2} grâce à $A(g, g^a)$,
- g^{b^2} grâce à $A(g, g^b)$,
- $g^{(a+b)^2}$ grâce à $A(g, g^a g^b)$.

On obtient alors

$$\frac{g^{(a+b)^2}}{g^{a^2} g^{b^2}} = g^{a^2+b^2+2ab-a^2-b^2} = g^{2ab}\,.$$

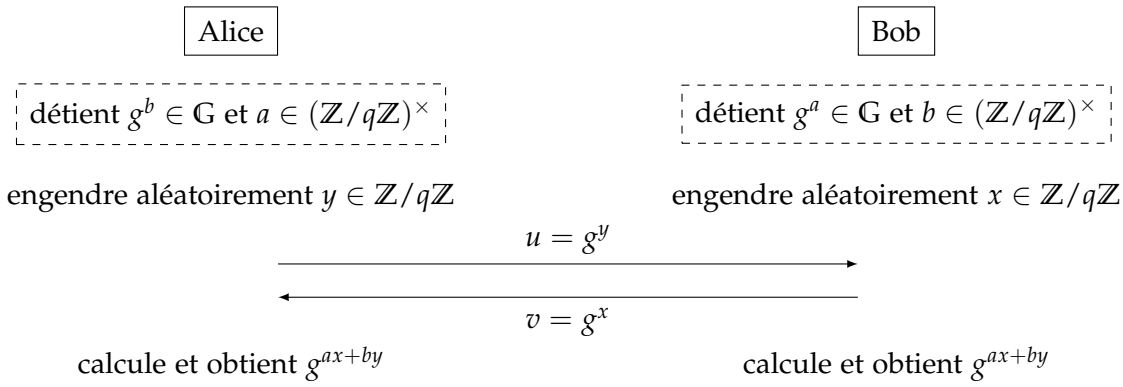
Solution Q3. Soit $x = y^2$ un carré dans $\mathbb{G}$. Comme r est impair et connu, on peut commencer par calculer $m = 2^{-1} \mod r$. Ce calcul est une simple inversion modulaire. Puis, on calcule $x^m = y^{2m} = y$ grâce à une exponentiation rapide.

Solution Q4. Avec la question 2, on obtient $g^{2ab} = (g^{ab})^2$, duquel on peut extraire g^{ab} grâce au calcul de racine carrée de la question 3.

Exercice 5. ($\star\star$) Une variante de Diffie–Hellman.

Alice et Bob souhaitent échanger un secret commun. Pour cela, ils mettent en place une variante du protocole de Diffie–Hellman. On se place donc dans un groupe cyclique $\mathbb{G}$ d'ordre q. **On suppose que q est premier.** Enfin, un générateur g de $\mathbb{G}$ est donné publiquement.

On suppose qu'Alice a engendré une valeur secrète aléatoire $a \in (\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^\times$, et a publié $g^a \in \mathbb{G}$. De même, Bob a engendré une valeur secrète $b \in (\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^\times$ et publié $g^b \in \mathbb{G}$. Le protocole d'échange de secret commun est décrit ci-dessous.



Question 1.– Détailler les calculs permettant à Alice et Bob de calculer la valeur commune g^{ax+by}, à partir des valeurs que chacun détient. En donner la complexité.

Question 2.– Une fois que les entiers a et b sont fixés, quelle est la taille de l'ensemble des valeurs communes possibles ?

Question 3.– Pourquoi l'attaque de la personne au milieu (*man-in-the-middle*), telle que décrite dans le cours pour le protocole de Diffie–Hellman, ne fonctionne-t-elle pas dans le cas présent ?

Question 4.– Supposons que l'on détienne un algorithme $\mathcal{A}$ qui sache résoudre efficacement le problème CDH (Diffie–Hellman calculatoire). Démontrer qu'on peut alors retrouver la valeur commune détenue par Alice et Bob en observant leurs échanges (c'est-à-dire en procédant à une attaque passive).

Solutions de l'Exercice 5.

Solution Q1. Alice obtient de Bob la valeur $v = g^x$, et elle connaît déjà g^b (la valeur précdemment publiée par Bob), a (sa valeur privée) et y (le secret qu'elle a engendré). Elle peut donc calculer :

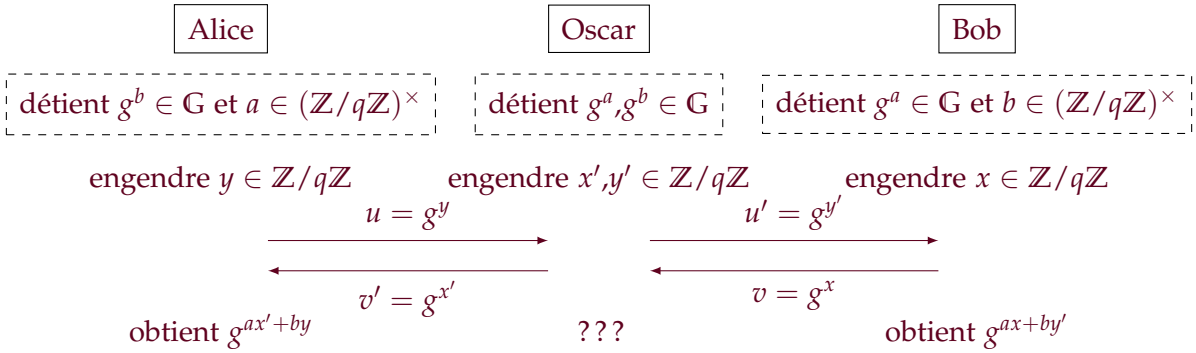
$$v^a (g^b)^y = g^{ax+by}.$$

De la même manière, Bob peut calculer $u^b (g^a)^x = g^{ax+by}$.

La complexité d'une exponentiation est en $O(\log q)$ opérations dans $\mathbb{G}$, donc la complexité du calcul complet (une multiplication + deux exponentiation) est également en $O(\log q)$ opérations.

Solution Q2. Comme q est premier et a et b sont inversibles modulo q, l'entier $ax + by$ peut atteient n'importe quelle valeur dans $\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$. L'élément g^{ax+by} peut donc être n'importe quel élément du groupe $\mathbb{G}$. On a donc q valeurs communes possibles.

Solution Q3. Si Oscar se place au milieu, on obtient le schéma suivant :



Comme Oscar ne connaît ni a, ni b, il ne peut pas calculer de valeur commune à Alice ou Bob.

Solution Q4. Supposons que l'algorithme $\mathcal{A}$ sache résoudre CDH. Autrement dit, pour tous $i, j \in \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$, la sortie de $\mathcal{A}(g, g^i, g^j)$ est g^{ij}.

On souhaite calculer g^{ax+by}. Pour cela, on connaît g^a et g^b (les valeur publiques d'Alice et Bob) ainsi que g^x et g^y (les échanges entre Alice et Bob).

À partir de g^a et g^x, on peut donc obtenir $g^{ax} = \mathcal{A}(g, g^a, g^x)$. De manière similaire, on obtient $g^{by} = \mathcal{A}(g, g^b, g^y)$. En multipliant ces deux valeurs, on trouve g^{ax+by}.

Exercice 6. ($\star\star$) 💻 Implantation de Diffie–Hellman dans $\mathrm{QR}_p^\times$.

Dans cet exercice on suppose que p est un nombre premier de taille importante **tel que** $p' = (p-1)/2$ **est également un nombre premier**. Un tel nombre premier p est appelé **nombre premier sûr**, tandis que p' est un **nombre premier de Sophie Germain**.

Question 1.– Trouver dans les bibliothèques `random` et `math` de `python` comment :

- tirer uniformément un entier entre 1 et x,
- calculer efficacement une puissance modulaire,
- calculer efficacement un inverse modulaire.

Question 2.– Écrire une fonction `is_square(x, p)` qui teste si un entier `x` est un résidu quadratique modulo `p`.

Question 3.– Écrire une fonction `random_QR_generator(p)` qui retourne un générateur aléatoire du groupe des résidus quadratiques modulo `p`. On rappelle que l'on suppose que $p' = (p-1)/2$ est également un nombre premier.

Question 4.– Écrire les fonctions suivantes du protocole de Diffie–Hellman :

- une fonction `system_parameters(t)` qui définit les paramètres du protocole : un nombre premier p aléatoire de taille t bits tel que $p' = (p-1)/2$ est aussi premier, et le générateur aléatoire g de $\mathrm{QR}_p^\times$,
- une fonction `random_secret(p)` qui définit la valeur secrète x engendrée par un participant au protocole,
- une fonction `to_send(x, g, p)` qui déduit de la valeur secrète x et du générateur g la valeur à transmettre à l'autre participant,
- une fonction `shared_value(gy, x, p)` qui déduit de la valeur reçue `gy` ($= g^y$) et de lm valeur secrète x, la valeur commune aux deux participants.

Pour l'implantation de la fonction `system_parameters(t)`, on pourra notamment s'aider de la fonction `Crypto.Util.number.getPrime(t)` de la bibiothèque `Crypto.Util`, voir :

`https://pycryptodome.readthedocs.io/en/latest/src/util/util.html#Crypto.Util.number.getPrime`

Question 5.– En choisissant une taille $t = 64$ (exemple-jouet), tester vos fonctions en exécutant les actions successives d'Alice et Bob dans le protocole de Diffie–Hellman.