Logiciel de calcul formel — Interrogation écrite 4 — 11/04/2024 — Sujet A 0

Aucun document et **aucun dispositif électronique** n'est autorisé — **Durée :** 30 min.

Nom : **Prénom :**

Exercice 1. QCM.

Dans ce questionnaire à choix multiples, une seule réponse est correcte. **Cochez la bonne réponse**.
Barème indicatif : réponse correcte 1 pt ; pas de réponse 0 pt ; réponse fausse −0.5 pt

(Q1) Pour accéder au coefficient de degré 3 d'un polynôme `F`, on utilise :

- ☐ `F(3)`
- ■ `F[3]`
- ☐ `F[4]`
- ☐ `F(4)`

(Q2) Comment calculer la limite en 0 de la fonction v définie ci-dessous ?

```
var('t')
v = ln(t)*exp(-1/t)
```

- ■ `limit(v, t=0)`
- ☐ `limit(v, 0)`
- ☐ `limit(v, t, 0)`
- ☐ `limit(0, v)`

(Q3) Supposons qu'un polynôme `B` à coefficients rationnels a été déclaré. Comment obtient-on ses racines sur $\mathbb{C}$ (avec 53 bits de précision) ?

- ■ `B.roots(CC)`
- ☐ `ZZ(B).roots()`
- ☐ `CC.roots(B)`
- ☐ `B.roots_over_ZZ()`

(Q4) On ouvre Sagemath, rien n'a été écrit précédemment. Que produit le code suivant ?

```
f = 1/(2-y)
print(f(y=2))
```

- ☐ La valeur `Infinity`
- ■ Une erreur à la 1ère ligne
- ☐ Une erreur à la 2ème ligne

Exercice 2. Questions courtes.

Question 1.– Donner une commande qui permet de calculer $\int_0^1 e^{-t}dt$. Si besoin, on supposera que la variable `t` a déjà été déclarée.

```
integral(exp(-t), t, 0, 1)
```

Question 2.– Donner la commande qui permet d'obtenir le polynôme dérivé du polynôme `P`.

```
P.derivative()
```

Question 3.– Donner une commande qui permet de calculer $\sum_{k=1}^{+\infty} \sin(k)/k$. Si besoin, on supposera que la variable `k` a déjà été déclarée.

```
sum(sin(k)/k, k, 1, +oo)
```

Question 4.– Donner les (ou la) commandes qui permettent de créer l'anneau $\mathbb{Q}[X]$ des polynômes dont les coefficients sont des rationnels, ainsi que la variable X associée.

```
A = PolynomialRing(QQ, "X")
X = A.gen()
```

Exercice 3. Suite de polynômes.

Question 1.– On suppose que des variables `A` et `X` ont déjà été déclarées, et contiennent respectivement l'anneau des polynômes $\mathbb{Q}[X]$ et la variable X associée. Écrire une fonction `suite_polynomes(n)` qui prend en entrée un entier naturel n, et qui retourne le terme d'indice n de la suite de polynômes $(S_n(X))_{n\geq 0}$ définie par :

$$S_0(X) = \frac{1}{2}X, \quad \text{et} \quad S_{n+1}(X) = 2S_n(X^2) + n(X-1), \quad \forall n \geq 0$$

```
def suite_polynomes(n):
    S = X/2
    for i in range(n):
        S = 2 * S(X**2) + i * (X-1)
    return S
```

Exercice 4. Trigonalisation.

Question 1.– Une matrice carrée $\mathbf{M} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est dite trigonalisable sur un corps $\mathbb{K}$ si son polynôme caractéristique est scindé sur $\mathbb{K}$, c'est-à-dire s'il admet exactement autant de racines (comptées avec multiplicité) sur $\mathbb{K}$ que son degré.

Écrire une fonction `est_trigonalisable(M)`, qui prend en entrée une matrice carrée $\mathbf{M}$, et qui retourne la valeur boolénne correspondant au fait que $\mathbf{M}$ est trigonalisable (ou non). On rappelle que toute matrice a une méthode `characteristic_polynomial()` qui retourne son polynôme caractéristique.

```
def est_trigonalisable(M):
    P = M.characteristic_polynomial()
    d = P.degree()
    racines = P.roots()
    m = 0
    for r in racines:
        m += r[1]
    return (m == d)
```

Université Paris 8 | Licence 2 Mathématiques année 2023–24 | J. Lavauzelle

Logiciel de calcul formel — Interrogation écrite 4 — 11/04/2024 — Sujet B 0

Aucun document et **aucun dispositif électronique** n'est autorisé — **Durée :** 30 min.

Nom : **Prénom :**

Exercice 1. QCM.

Dans ce questionnaire à choix multiples, une seule réponse est correcte. **Cochez la bonne réponse.**
Barème indicatif : réponse correcte 1 pt ; pas de réponse 0 pt ; réponse fausse −0.5 pt

(Q1) Pour accéder à la liste de **tous** les coefficients d'un polynôme `F` (y compris les coefficients nuls), on utilise :

- ☐ `coefficients(F, sparse=False)`
- ■ `F.coefficients(sparse=False)`
- ☐ `F.coefficients()`
- ☐ `coefficients(F)`

(Q2) Comment calculer la limite en 1 de la fonction g définie ci-dessous ?

```
var('t')
g = ln(t-1)/(1-t**2)
```

- ■ `limit(g, t=1)`
- ☐ `limit(g, 1)`
- ☐ `limit(g, t, 1)`
- ☐ `limit(1, g)`

(Q3) Supposons qu'un polynôme `A` à coefficients rationnels a été déclaré. Comment obtient-on ses racines sur $\mathbb{R}$ (avec 53 bits de précision) ?

- ■ `A.roots(RR)`
- ☐ `RR(A).roots()`
- ☐ `RR.roots(A)`
- ☐ `A.roots_over_RR()`

(Q4) On ouvre Sagemath, rien n'a été écrit précédemment. Que produit le code suivant ?

```
f = v/(v+1)
print(f(v=-1))
```

- ☐ La valeur `Infinity`
- ■ Une erreur à la 1ère ligne
- ☐ Une erreur à la 2ème ligne

Exercice 2. Questions courtes.

Question 1.– Donner une commande qui permet de calculer $\int_{-2}^{2} \frac{t^2}{t-3} dt$. Si besoin, on supposera que la variable `t` a déjà été déclarée.

```
integral(t**2/(t-3), t, -2, 2)
```

Question 2.– Donner la commande qui permet d'évaluer un **polynôme** `P` en une valeur `value`.

```
P(value)
```

Question 3.– Donner une commande qui permet de calculer $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k^2+1}$. Si besoin, on supposera que la variable `k` a déjà été déclarée.

```
sum(1/(k**2+1), k, 0, +oo)
```

Question 4.– Donner les (ou la) commandes qui permettent de créer l'anneau $\mathbb{Q}[X]$ des polynômes dont les coefficients sont des rationnels, ainsi que la variable X associée.

```
A = PolynomialRing(QQ, "X")
X = A.gen()
```

Exercice 3. Suite de polynômes.

Question 1.– On suppose que des variables `A` et `X` ont déjà été déclarées, et contiennent respectivement l'anneau des polynômes $\mathbb{Q}[X]$ et la variable X associée. Écrire une fonction `suite_polynomes(n)` qui prend en entrée un entier naturel n, et qui retourne le terme d'indice n de la suite de polynômes $(Q_n(X))_{n\geq 0}$ définie par :

$$Q_0(X) = -X+2, \quad \text{et} \quad Q_{n+1}(X) = \frac{1}{2}Q_n(X+1) - nX^2, \quad \forall n \geq 0$$

```
def suite_polynomes(n):
    Q = - X + 2
    for i in range(n):
        Q = (1/2) * Q(X+1) - i*X**2
    return Q
```

Exercice 4. Trigonalisation.

Question 1.– Une matrice carrée $\mathbf{M} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est dite trigonalisable sur un corps $\mathbb{K}$ si son polynôme caractéristique est scindé sur $\mathbb{K}$, c'est-à-dire s'il admet exactement autant de racines (comptées avec multiplicité) sur $\mathbb{K}$ que son degré.

Écrire une fonction `est_trigonalisable(M)`, qui prend en entrée une matrice carrée $\mathbf{M}$, et qui retourne la valeur boolénne correspondant au fait que $\mathbf{M}$ est trigonalisable (ou non). On rappelle que toute matrice a une méthode `characteristic_polynomial()` qui retourne son polynôme caractéristique.

```
def est_trigonalisable(M):
    P = M.characteristic_polynomial()
    d = P.degree()
    racines = P.roots()
    m = 0
    for r in racines:
        m += r[1]
    return (m == d)
```

Université Paris 8 | Licence 2 Mathématiques année 2023–24 | J. Lavauzelle

Logiciel de calcul formel — Interrogation écrite 4 — 26/04/2024 — Sujet C 0

Aucun document et **aucun dispositif électronique** n'est autorisé — **Durée :** 30 min.

Nom : **Prénom :**

Exercice 1. QCM.

Dans ce questionnaire à choix multiples, une seule réponse est correcte. **Cochez la bonne réponse**.
Barème indicatif : réponse correcte 1 pt ; pas de réponse 0 pt ; réponse fausse -0.5 pt

(Q1) Pour accéder au coefficient de degré 3 d'un polynôme `F`, on utilise :

- ☐ `F(3)`
- ■ `F[3]`
- ☐ `F[4]`
- ☐ `F(4)`

(Q2) Comment calculer la limite en -1 de la fonction u définie ci-dessous ?

```
var('t')
u = (1+t)/(cos(pi*t/2))
```

- ■ `limit(u, t=-1)`
- ☐ `limit(u, -1)`
- ☐ `limit(u, t, -1)`
- ☐ `limit(-1, u)`

(Q3) Supposons qu'un polynôme `F` à coefficients entiers a été déclaré. Comment obtient-on ses racines sur $\mathbb{Q}$?

- ■ `F.roots(QQ)`
- ☐ `QQ(F).roots()`
- ☐ `QQ.roots(F)`
- ☐ `F.roots_over_QQ()`

(Q4) On ouvre Sagemath, rien n'a été écrit précédemment. Que produit le code suivant ?

```
var('u')
f = u/(u+1)
print(f(u=-1))
```

- ☐ La valeur `Infinity`
- ■ Une erreur à la 3ème ligne
- ☐ Une erreur à la 2ème ligne

Exercice 2. Questions courtes.

Question 1.– Donner une commande qui permet de calculer $\int_{-1}^{1} \ln(t^2+2)dt$. Si besoin, on supposera que la variable `t` a déjà été déclarée.

```
integral(ln(t**2+2), t, -1, 1)
```

Question 2.– Donner la commande qui permet d'obtenir le degré d'un polynôme `P`.

```
P.degree()
```

Question 3.– Donner une commande qui permet de calculer $\sum_{n=1}^{+\infty} 3^{-n}$. Si besoin, on supposera que la variable `n` a déjà été déclarée.

```
sum((1/3)**n, n, 1, +oo)
```

Question 4.– Donner les (ou la) commandes qui permettent de créer l'anneau $\mathbb{Q}[X]$ des polynômes dont les coefficients sont des rationnels, ainsi que la variable X associée.

```
A = PolynomialRing(QQ, "X")
X = A.gen()
```

Exercice 3. Suite de polynômes.

Question 1.– On suppose que des variables `A` et `X` ont déjà été déclarées, et contiennent respectivement l'anneau des polynômes $\mathbb{Q}[X]$ et la variable X associée. Écrire une fonction `suite_polynomes(n)` qui prend en entrée un entier naturel n, et qui retourne le terme d'indice n de la suite de polynômes $(P_n(X))_{n\geq 0}$ définie par :

$$P_0(X) = X + 1, \quad \text{et} \quad P_{n+1}(X) = XP_n(X-1) - 2nX, \quad \forall n \geq 0$$

```
def suite_polynomes(n):
    P = X + 1
    for i in range(n):
        P = X*P(X-1) - 2*i*X
    return P
```

Exercice 4. Trigonalisation.

Question 1.– Une matrice carrée $\mathbf{M} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est dite trigonalisable sur un corps $\mathbb{K}$ si son polynôme caractéristique est scindé sur $\mathbb{K}$, c'est-à-dire s'il admet exactement autant de racines (comptées avec multiplicité) sur $\mathbb{K}$ que son degré.

Écrire une fonction `est_trigonalisable(M)`, qui prend en entrée une matrice carrée $\mathbf{M}$, et qui retourne la valeur boolénne correspondant au fait que $\mathbf{M}$ est trigonalisable (ou non). On rappelle que toute matrice a une méthode `characteristic_polynomial()` qui retourne son polynôme caractéristique.

```
def est_trigonalisable(M):
    P = M.characteristic_polynomial()
    d = P.degree()
    racines = P.roots()
    m = 0
    for r in racines:
        m += r[1]
    return (m == d)
```

Logiciel de calcul formel — Interrogation écrite 4 — 26/04/2024 — Sujet D 0

Aucun document et **aucun dispositif électronique** n'est autorisé — **Durée :** 30 min.

Nom : **Prénom :**

Exercice 1. QCM.

Dans ce questionnaire à choix multiples, une seule réponse est correcte. **Cochez la bonne réponse**.
Barème indicatif : réponse correcte 1 pt ; pas de réponse 0 pt ; réponse fausse −0.5 pt

(Q1) Pour accéder à la liste de **tous** les coefficients d'un polynôme `F` (y compris les coefficients nuls), on utilise :

- ☐ `coefficients(F, sparse=False)`
- ■ `F.coefficients(sparse=False)`
- ☐ `F.coefficients()`
- ☐ `coefficients(F)`

(Q2) Comment calculer la limite en 0 de la fonction f définie ci-dessous ?

```
var('t')
f = sin(t**2)/(t*(exp(t)-1))
```

- ■ `limit(f, t=0)`
- ☐ `limit(f, 0)`
- ☐ `limit(f, t, 0)`
- ☐ `limit(0, f)`

(Q3) Supposons qu'un polynôme `G` à coefficients rationnels a été déclaré. Comment obtient-on ses racines sur $\mathbb{Z}$?

- ■ `G.roots(ZZ)`
- ☐ `ZZ(G).roots()`
- ☐ `ZZ.roots(G)`
- ☐ `G.roots_over_ZZ()`

(Q4) On ouvre Sagemath, rien n'a été écrit précédemment. Que produit le code suivant ?

```
var('x')
f = 1/(2-x)
print(f(x=2))
```

- ☐ La valeur `Infinity`
- ■ Une erreur à la 3ème ligne
- ☐ Une erreur à la 2ème ligne

Exercice 2. Questions courtes.

Question 1.– Donner une commande qui permet de calculer $\int_0^{\pi} \cos(\frac{t}{2})dt$. Si besoin, on supposera que la variable `t` a déjà été déclarée.

```
integral(cos(t/2), t, 0, pi)
```

Question 2.– Donner la commande qui permet de factoriser un **polynôme** `P` dans l'anneau où il a été construit.

```
P.factor()
```

Question 3.– Donner une commande qui permet de calculer $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3}$. Si besoin, on supposera que la variable `n` a déjà été déclarée.

```
sum(1/(n**3), n, 1, +oo)
```

Question 4.– Donner les (ou la) commandes qui permettent de créer l'anneau $\mathbb{Q}[X]$ des polynômes dont les coefficients sont des rationnels, ainsi que la variable X associée.

```
A = PolynomialRing(QQ, "X")
X = A.gen()
```

Exercice 3. Suite de polynômes.

Question 1.– On suppose que des variables `A` et `X` ont déjà été déclarées, et contiennent respectivement l'anneau des polynômes $\mathbb{Q}[X]$ et la variable X associée. Écrire une fonction `suite_polynomes(n)` qui prend en entrée un entier naturel n, et qui retourne le terme d'indice n de la suite de polynômes $(R_n(X))_{n\geq 0}$ définie par :

$$R_0(X) = X^2, \quad \text{et} \quad R_{n+1}(X) = -2R_n(X+3) + 3n(X+1), \quad \forall n \geq 0$$

```
def suite_polynomes(n):
    R = X**2
    for i in range(n):
        R = - 2 * R(X+3) + 3 * i * (X+1)
    return R
```

Exercice 4. Trigonalisation.

Question 1.– Une matrice carrée $\mathbf{M} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est dite trigonalisable sur un corps $\mathbb{K}$ si son polynôme caractéristique est scindé sur $\mathbb{K}$, c'est-à-dire s'il admet exactement autant de racines (comptées avec multiplicité) sur $\mathbb{K}$ que son degré.

Écrire une fonction `est_trigonalisable(M)`, qui prend en entrée une matrice carrée $\mathbf{M}$, et qui retourne la valeur boolénne correspondant au fait que $\mathbf{M}$ est trigonalisable (ou non). On rappelle que toute matrice a une méthode `characteristic_polynomial()` qui retourne son polynôme caractéristique.

```
def est_trigonalisable(M):
    P = M.characteristic_polynomial()
    d = P.degree()
    racines = P.roots()
    m = 0
    for r in racines:
        m += r[1]
    return (m == d)
```