Université Paris 8 J. Lavauzelle

Master 1 Mathématiques et applications — année 2023–24

Codes algébriques – Feuille de TD 2

02/02/2024

Le corrigé de certains exercices sera disponible à l'adresse suivante :

`https://lvzl.fr/teaching/2023-24/ca.html`

($\star$) exercice fondamental ($\star\star$) pour s'entraîner ($\star\star\star$) pour aller plus loin 💻 sur machine

Exercice 1. ($\star$) Construire un code cyclique par son générateur.

Question 1.– Donner une matrice génératrice et la dimension du code cyclique de longueur 6 sur $\mathbb{F}_2$ engendré par le polynôme $x^2 + 1$.

Question 2.– Donner une matrice génératrice et la dimension du code cyclique de longueur 6 sur $\mathbb{F}_3$ engendré par le polynôme $(x + 1)^2(x - 1)$.

Exercice 2. ($\star\star$) Générateurs de codes cycliques.

Donner le polynôme générateur des codes cycliques suivants.

Question 1.– Le code de parité de longueur $n \geq 2$, sur un corps fini $\mathbb{F}_q$ quelconque.

Question 2.– Le code binaire de matrice génératrice

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Question 3.– Le code binaire de matrice génératrice

$$\boldsymbol{G} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Question 4.– Le code associé à l'idéal $\langle x^3 + x^2 \rangle$ de $\mathbb{F}_2[x]/(x^5 - 1)$.

Question 5.– Le code sur $\mathbb{F}_5$ de matrice génératrice

$$\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

Exercice 3. ($\star$) Code dual d'un code cyclique.

Question 1.– Décrire, par un polynôme générateur et par une matrice génératrice, le **dual** du code cyclique de polynôme générateur $g(x) = x^3 + x + 1$ sur $\mathbb{F}_2$.

Question 2.– Décrire, par son polynôme générateur, le **dual** du code cyclique binaire de matrice génératrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Question 3.– On s'intéresse à des codes cycliques de longueur 8 sur $\mathbb{F}_3$.

1. Vérifier que la factorisation en irréductibles de $x^8 - 1$ dans $\mathbb{F}_3[x]$ est :

$$x^8 - 1 = (x-1) \cdot (x+1) \cdot (x^2+1) \cdot (x^2+x-1) \cdot (x^2-x-1).$$

2. Déterminer le **dual** du code cyclique $\mathcal{C}$, de longueur 8 sur $\mathbb{F}_3$, et de polynôme générateur

$$g(x) = 1 + x - x^2 - x^4 - x^5 + x^6.$$

3. Démontrer (par un argument simple) que $\mathcal{C}$ est auto-orthogonal c'est-à-dire qu'il vérifie $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{C}^{\perp}$.