Université Paris 8 J. Lavauzelle

Licence 3 Mathématiques — année 2022–23

Tremplin Master – Sujets de devoir

édité le 5 avril 2023

Table des matières

Consignes générales.

1. Se mettre en binôme (autant que possible) et choisir 3 sujets préférentiels. Envoyer la liste de ces 3 sujets (classés par préférence) avant le dimanche 9 avril.
2. La semaine suivant le 9 avril, un de ces 3 sujets sera assigné à votre binôme.
3. Les réponses à ces devoirs sont à retourner, par email à `julien.lavauzelle@univ-paris8.fr`, **avant le vendredi 05 mai 2023, minuit**.
4. Certains sujets sont assez longs, certaines questions ne sont pas faciles : faites de votre mieux ! Étant donné le contexte, il n'est pas attendu de traiter entièrement le sujet pour obtenir une note satisfaisante.

1 Implantation de la décomposition de Dunford

Objectif : implanter, par exemple avec le logiciel de calcul formel `Sagemath`, un algorithme qui prend en entrée une matrice $\boldsymbol{M}$ sur un corps K, et qui calcule sa décomposition de Dunford.

Rappel : soit E un K-espace vectoriel et $f \in \mathrm{End}_K(E)$. On suppose que le polynôme caractéristique de f, noté $\chi_f(X)$, est scindé. Autrement dit, si $n = \dim(E)$, il s'écrit :

$$\chi_f(X) = (-1)^n \prod_{i=1}^{k} (X - \lambda_i)^{m_i}$$

où $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_k\}$ forme l'ensemble des valeurs propres de f, et où $m_i \geq 1$ est la multiplicité de λ_i en tant que racine de $\chi_f(X)$.

La **décomposition de Dunford** de f est l'écriture (unique) de f comme une somme $d + c$ où d est diagonalisable, c est nilpotente, et d et c commutent.

Méthode. Une méthode pour le calcul de la décomposition de Dunford :

1. Calculer $\chi_f(X) = (-1)^n \prod_{i=1}^{k} (X - \lambda_i)^{m_i}$. On note $Q_i(X) = (X - \lambda_i)^{m_i}$.
2. Pour tout $i \in \{1, \ldots, k\}$, calculer des polynômes U_i tels que $1 = U_1 Q_1 + U_2 Q_2 + \cdots + Q_k U_k$. Une idée pour cela : appliquer successivement l'algorithme d'Euclide étendu.
3. Pour tout $i \in \{1, \ldots, k\}$, calculer les matrices de projection $\boldsymbol{P}_i = (U_i Q_i)(\boldsymbol{M})$.
4. Poser :
$$\boldsymbol{D} := \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \boldsymbol{P}_i \quad \text{et} \quad \boldsymbol{C} := \boldsymbol{M} - \boldsymbol{D}\,.$$
5. Retourner $\boldsymbol{D}$ et $\boldsymbol{C}$.

Consigne. Rendre, par email, un ou des fichiers de programmation **commentés** qui répondent aux questions suivantes.

Question 1. Écrire une fonction qui calcule la décomposition de Dunford d'une matrice $\boldsymbol{M}$ avec la méthode ci-dessus.

Question 2. Écrire une fonction de test, qui prend en entrée $\boldsymbol{M}$, $\boldsymbol{D}$ et $\boldsymbol{C}$, et qui vérifie que $\boldsymbol{M} = \boldsymbol{D} + \boldsymbol{C}$, que $\boldsymbol{D}$ est diagonalisable et $\boldsymbol{C}$ est nilpotente, et que $\boldsymbol{D}$ et $\boldsymbol{C}$ commutent.

Question 3. Tester votre implantation avec les matrices suivantes :

1. Une matrice $\boldsymbol{M}$ diagonale. Vous devez obtenir la décomposition $\boldsymbol{D} = \boldsymbol{M}$ et $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{0}$.
2. Une matrice $\boldsymbol{M}$ diagonalisable sur K (par exemple : $\boldsymbol{M} = \left(\begin{smallmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 2 & 4 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \end{smallmatrix}\right)$). Vous devez obtenir la décomposition $\boldsymbol{D} = \boldsymbol{M}$ et $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{0}$.
3. Une matrice $\boldsymbol{M}$ nilpotente (par exemple : $\boldsymbol{M} = \left(\begin{smallmatrix} 3 & 9 & -9 \\ 2 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & -3 \end{smallmatrix}\right)$). Vous devez obtenir la décomposition $\boldsymbol{D} = \boldsymbol{0}$ et $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{M}$.
4. La matrice $\boldsymbol{M} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & -1 \\ -3 & 3 & 1 & -3 \\ -2 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Vous devez obtenir
$$\boldsymbol{D} = \boldsymbol{P} \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 2 & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \boldsymbol{P}^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -4 & 1 \\ -1 & 3 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & -2 & 3 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et } \boldsymbol{C} = \boldsymbol{M} - \boldsymbol{D}$$
5. D'autres matrices que vous engendrez vous-même, et dont vous testerez la décomposition grâce à la question 2.

2 Endomorphismes tripotents

Consigne. Rendre, par email, un fichier `.pdf` rédigé via LaTeX, qui répond aux questions suivantes.

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. On dit que $u \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(E)$ est tripotent si $u^3 := u \circ u \circ u = u$.

Question 1. Démontrer que tout projecteur de E est tripotent.

Question 2. Démontrer que toute symétrie de E est tripotente.

Question 3. Déterminer un endomorphisme tripotent qui ne soit, ni une symétrie, ni un projecteur.

Question 4. Soit u tripotent. Démontrer les propriétés suivantes :

1. $-u$ est tripotent
2. tout endomorphisme semblable à u est tripotent
3. $p = u^2$ est un projecteur dont l'image est $\mathrm{im} p = \mathrm{im} u$ et le noyau $\ker p = \ker u$
4. l'espace $F := \mathrm{im} u$ est stable par u, et la restriction $u_{|F}$ est une symétrie de F
5. on a $E = \ker(u - \mathrm{id}) \oplus \ker(u - \mathrm{id}) \oplus \ker(u - \mathrm{id})$.

Question 5. Soit $u \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(E)$.

1. Démontrer que u est tripotent si et seulement s'il existe deux projecteurs p et q de E tels que $u = p - q$ et $p \circ q = q \circ p = 0$.
2. Démontrer que, dans le cas où u est tripotent les projecteurs p et q ci-dessus sont uniques. Puis, exprimer p et q comme des polynômes en u.

Question 6. On suppose que E est de dimension finie. Démontrer que tout endomorphisme tripotent est diagonalisable. Quelles sont ses valeurs propres éventuelles ?

Question 7. Dans cette dernière question, on suppose que E est de dimension 2. En étudiant toutes les formes potentielles de leur polynôme minimal, classifier les endomorphismes tripotents. Puis, donner un exemple sous forme matricielle dans chaque cas. Pour cela, on déduira de la définition d'un endomorphisme tripotent un de ses polynômes annulateurs.

3 Cœur et nilespace d'un endomorphisme

Consigne. Rendre, par email, un fichier `.pdf` rédigé via LaTeX, qui répond aux questions suivantes.

Soit E un K-espace vectoriel, et $u \in \mathrm{End}_K(E)$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on note $N_k := \ker(u^k)$ et $I_k := \mathrm{im}(u^k)$.

Question 1. Que valent N_0 et I_0 ?

Question 2. Démontrer que la suite $(N_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est croissante pour l'inclusion.

Question 3. Démontrer que la suite $(I_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est décroissante pour l'inclusion.

Question 4. Démontrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a $u(N_{k+1}) \subseteq N_k$ et $u(I_k) = I_{k+1}$.

On suppose, dans toute la suite du problème, que E est de dimension finie égale à $n \geq 1$.

Question 5. Démontrer qu'il existe un entier k tel que $N_k = N_{k+1}$.

On note r le plus petit entier tel que $N_r = N_{r+1}$.

Question 6. Démontrer que $r \leq n$ et que la suite $(N_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est constante à partir du rang r, c'est-à-dire que $N_r = N_{r+1} = N_{r+2} = \ldots$.

Question 7. Démontrer que la suite $(I_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante jusqu'au rang r, et constante à partir du rang r.

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on note maintenant $n_k = \dim(N_k)$.

Question 8. Démontrer que la suite d'entiers $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$, définie par $a_k = n_{k+1} - n_k$, est décroissante. Pour cela, on pourra considérer un supplémentaire de N_{k+1} dans N_{k+2} et observer le comportement de u sur ce supplémentaire.

Les espaces $N_\infty := N_r$ et $I_\infty := I_r$ sont respectivement appelés *nilespace* et *cœur* de l'endomorphisme u.

Question 9. Démontrer que N_∞ et I_∞ sont supplémentaires dans E.

Question 10. Démontrer que :

- la restriction de u à N_∞, notée $u_{|N_\infty}$, est un endomorphisme nilpotent de N_∞ ;
- la restriction de u à I_∞, notée $u_{|I_\infty}$, est un automorphisme de I_∞.

Question 11. Application. Soit $E = \mathbb{R}_3[X] = \{P(X) \in \mathbb{R}[X] \mid \deg(P) \leq 3\}$. Calculer le cœur et le nilespace de l'endomorphisme $u \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(E)$ donné par : $u(P(X)) := (X+1)P'(X)$.

4 Compléments sur les projecteurs

Consigne. Rendre, par email, un fichier `.pdf` rédigé via LaTeX, qui répond aux questions suivantes.

Soit E un K-espace vectoriel où K est un corps commutatif.

Pour $(u, v) \in \mathrm{End}_K(E)^2$, on note $[u, v] = u \circ v - v \circ u \in \mathrm{End}_K(E)$ le commutant de u et v.

On rappelle qu'un projecteur est un endomorphisme p tel que $p^2 := p \circ p = p$. On a montré en cours que si p est un projecteur, alors $E = \ker(p) + \mathrm{im}(p)$.

Question 1. Démonter que p est un projecteur si et seulement si $\mathrm{id} - p$ est un projecteur.

Si p est un projecteur, alors $p' := \mathrm{id} - p$ est appelé projecteur associé à p

Question 2. Quels sont les liens entre les noyaux et images de deux projecteurs associés ?

Question 3. Soient p et q deux projecteurs. Démontrer les équivalences suivantes :

1. $p \circ q = p \iff \ker q \subseteq \ker p$
2. $p \circ q = q \iff \mathrm{im} q \subseteq \mathrm{im} p$

Question 4. Soient p un projecteur et u un endomorphisme de E. Démontrer les équivalences suivantes

1. $\mathrm{im}(p)$ est stable par u si et seulement si $p \circ u \circ p = u \circ p$
2. $\ker(p)$ est stable par u si et seulement si $p \circ u \circ p = p \circ u$

Si f est un endomorphisme de E, on appelle commutant de f l'ensemble

$$\mathcal{C}(f) = \{u \in \mathrm{End}_K(E), u \circ f = f \circ u\} .$$

On peut montrer que $\mathcal{C}(f)$ est une sous-algèbre de $(\mathrm{End}_K(E), +, \circ, \cdot)$.

Question 5. Si $f = \alpha \cdot \mathrm{id}$ pour un certain $\alpha \in K$, que vaut $\mathcal{C}(f)$?

Question 6. Démontrer que l'ensemble des polynômes en f est une sous-algèbre de $\mathcal{C}(f)$. En déduire que la dimension de $\mathcal{C}(f)$, en tant qu'espace vectoriel sur K, est supérieure ou égale au degré du polynôme minimal de f.

Question 7. Déduire de la question 4 que, si p est un projecteur, alors $\mathcal{C}(p)$ est isomorphe au produit $\mathrm{End}_K(\mathrm{im}(p)) \times \mathrm{End}_K(\ker(p))$. Pour cela, on pourra exhiber une isomorphisme d'algèbre.

Question 8. Soient p et q deux projecteurs de E.

1. Démontrer que, si p et q commutent, alors $p \circ q$ est également d'un projecteur de E.
2. Trouver un exemple de deux projecteurs p et q tels que $p \circ q$ n'est pas un projecteur.

Deux projecteurs sont dits orthogonaux si $p \circ q = q \circ p = 0$.

Question 9. Démontrer que si p et q sont deux projecteurs.

1. Démontrer que si p et q sont orthogonaux, alors alors $p + q$ est un projecteur. Donner le noyau et l'image de $p + q$ en fonction de ceux de p et q.
2. Démontrer que si $p + q$ est un projecteur, et si la caractéristique de K est différente de 2, alors p et q sont orthogonaux.
3. Dans le cas où $K = (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$, trouver deux projecteurs non-orthogonaux p et q tels que $p + q$ est un projecteur.

5 Théorème d'amitié d'Erdös

Consigne. Rendre, par email, un fichier `.pdf` rédigé via LaTeX, qui répond aux questions suivantes.

Dans ce problème, on propose de démontrer, grâce à des relations sur des matrices, le théorème d'amitié d'Erdös qui s'énonce ainsi : « *Si dans un ensemble de personnes, toute paire de personnes a exactement un ami en commun, alors l'une des personnes de cet ensemble est amie avec tous les autres* »

Soit $n \geq 2$. On note $\boldsymbol{I}$ la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, et $\boldsymbol{J}$ la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont toutes les entrées sont égales à 1.

Question 1. Exprimer $\boldsymbol{J}^2$ en fonction de $\boldsymbol{J}$.

Question 2. En déduire les valeurs propres de la matrice $\boldsymbol{J}$. Est-elle diagonalisable ?

On note maintenant $\mathcal{A} = \{a\boldsymbol{I} + b\boldsymbol{J} \mid (a,b) \in \mathbb{R}^2\}$.

Question 3. Soit $\boldsymbol{M} = a\boldsymbol{I} + b\boldsymbol{J} \in \mathcal{A}$.

1. Déterminer les valeurs propres de $\boldsymbol{M}$ en fonction de a, b et n.
2. Donner son polynôme minimal.
3. La matrice $\boldsymbol{M}$ est-elle diagonalisable ?

Question 4. Soit $\boldsymbol{M} = a\boldsymbol{I} + b\boldsymbol{J} \in \mathcal{A}$. Démontrer que :

$$\exists \boldsymbol{S} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \boldsymbol{S}^2 = \boldsymbol{M} \quad \Longleftrightarrow \quad a \geq 0 \text{ et } a + nb \geq 0\,.$$

Question 5. Soit $\boldsymbol{S} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\boldsymbol{S}^2 = a\boldsymbol{I} + b\boldsymbol{J} \in \mathcal{A}$.

1. Démontrer que $\boldsymbol{S}$ est diagonalisable.
2. Démontrer que l'une de des valeurs propres s'écrit $\epsilon\sqrt{a+nb}$ où $\epsilon \in \{-1,1\}$, et que dans ce cas $-\epsilon\sqrt{a+nb}$ n'est pas valeur propre.
3. Démontrer que, si $\boldsymbol{S}$ a trace nulle, alors a divise nb.

Soit $\mathcal{R}$ une relation binaire sur un ensemble de E. On suppose que $\mathcal{R}$

— est antiréflexive : aucun x de E ne vérifie $x\mathcal{R}x$;

— est symétrique : $\forall (x,y) \in E^2$, on a $x\mathcal{R}y \implies y\mathcal{R}x$;

— vérifie que pour tout $(x,y) \in E^2$ tel que $x \neq y$, il existe un unique $z \in E$ telq ue $x\mathcal{R}z$ et $y\mathcal{R}z$.

Il faut penser ici que $\mathcal{R}$ représente la relation d'amitié mentionnée en début d'énoncé. On note ainsi $C_x = \{y \in E \mid x\mathcal{R}y\}$ l'ensemble des amis de x.

Pour démontrer le théorème d'Erdos, on raisonne par l'absurde. On suppose donc que $\mathcal{R}$ vérifie également :

$$\forall x \in E, C_x \neq E \setminus \{x\}$$

Question 6. Soit $(x,y) \in E^2$ tels que $y \notin C_x$. Donner une bijection entre C_x et C_y. En déduire que tous les C_x ont le même cardinal r tel que $2 \leq r \leq n-2$.

Soit $\boldsymbol{S}$ la matrice d'incidence de la relation $\mathcal{R}$: c'est la matrice carrée de taille n, dont les entrées sont indexées par les éléments $x_1, \ldots, x_n$ de E, et telle que $S_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } x_i\mathcal{R}x_j \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$.

Question 7. Démontrer que $\boldsymbol{S}^2 \in \mathcal{A}$.

Question 8. Soit $\mathbf{1}$ le vecteur $(1,\ldots,1)$ de taille n. En calculant $\mathbf{1}\boldsymbol{S}^2\mathbf{1}^\top$ de deux manières différentes, démontrer que $n = r^2 - r + 1$.

Question 9. Conclure grâce à la question 5.

6 Racines carrées de matrices

Consigne. Rendre, par email, un fichier `.pdf` rédigé via LaTeX, qui répond aux questions suivantes.

Pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, on note $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ l'algèbre des matrices carrées d'ordre n sur $\mathbb{K}$, et $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ le groupe des matrices inversibles. La matrice nulle et la matrice identité sont respectivement notées $\boldsymbol{O}$ et $\boldsymbol{I}$. Si $\boldsymbol{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on définit également :

— $\mathcal{P}_{\mathbb{K}}(\boldsymbol{A}) := \{P(\boldsymbol{A}), P \in \mathbb{K}[X]\}$ la sous-algèbre des polynômes en $\boldsymbol{A}$, parfois aussi notée $\mathbb{K}[\boldsymbol{A}]$;
— $\mathcal{C}_{\mathbb{K}}(\boldsymbol{A}) = \{\boldsymbol{M} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \mid \boldsymbol{MA} = \boldsymbol{AM}\}$ le commutant de $\boldsymbol{A}$;
— $\mathcal{R}_{\mathbb{K}}(\boldsymbol{A}) = \{\boldsymbol{R} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \mid \boldsymbol{R}^2 = \boldsymbol{A}\}$.

Dans ce problème, on confond les matrices $\boldsymbol{M}$ et les endomorphismes $\boldsymbol{x} \mapsto \boldsymbol{Mx}$ associés.

Question 1. (racines carrées de l'identité)

1. Donner un qualificatif, parmi les notions vues en cours, pour les matrices de $\mathcal{R}_{\mathbb{K}}(\boldsymbol{I})$.
2. Pour $x \in \mathbb{K}$, calculer $\begin{pmatrix} x & 1+x \\ 1-x & -x \end{pmatrix}^2$.
3. En déduire que, pour $n = 2$, $\boldsymbol{I}$ admet une infinité de racines carrées.
4. Cela reste t-il vrai pour $n > 2$?

Question 2. (racines carrées de zéro)

1. Donner un qualificatif, parmi les notions vues en cours, pour les matrices de $\mathcal{R}_{\mathbb{K}}(\boldsymbol{O})$.
2. Soit $\boldsymbol{R} \in \mathcal{R}_{\mathbb{K}}(\boldsymbol{O})$ et r le rang de $\boldsymbol{R}$. Comparer $\mathrm{im}(\boldsymbol{R})$ et $\ker(\boldsymbol{R})$, puis déduire que $r \leq n/2$.
3. Soit $(e_1, \dots, e_r)$ une base de $\mathrm{im}(\boldsymbol{R})$, que l'on complète avec $(e_{r+1}, \dots, e_{n-r})$ pour former une base de $\ker(\boldsymbol{R})$. Pour tout $i \in \{1, \dots, r\}$, on choisit également un vecteur $u_i \in \mathbb{K}^n$ tel que $\boldsymbol{R}(u_i) = e_i$. Montrer que $(e_1, u_1, e_2, u_2, \dots, e_r, u_r, e_{r+1}, \dots, e_{n-r})$ est une base de $\mathbb{K}^n$.
4. En déduire que la matrice $\boldsymbol{R}$ est semblable à une matrice diagonale par blocs, constituée de r blocs $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et du bloc identité de taille $n - 2r$.

Question 3. (racines carrées de $-\boldsymbol{I}$ dans $\mathbb{C}$) Démontrer que toute matrice de $\mathcal{R}_{\mathbb{C}}(-\boldsymbol{I})$ est diagonalisable, et donner les valeurs propres associées.

Question 4. (racines carrées de $-\boldsymbol{I}$ dans $\mathbb{R}$)

1. Démontrer que si n est impair, alors $\mathcal{R}_{\mathbb{R}}(-\boldsymbol{I}) = \varnothing$
2. Pour $n = 2$, trouver une matrice réelle "simple" dont le carré vaut $-\boldsymbol{I}$.
3. **[difficile]** Pour $n \geq 2$ pair, donner la forme générale d'une matrice de $\mathcal{R}_{\mathbb{R}}(-\boldsymbol{I})$.