Université Paris 8 Année 2022–2023

M1 Mathématiques et applications, parcours ACC

Théorie de l'information – Feuille de TD 6

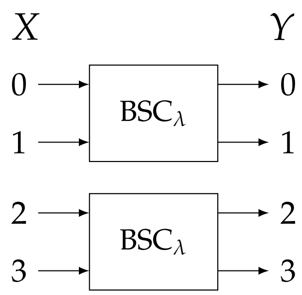
26/10/2022

Le corrigé de certains exercices sera disponible à l'adresse suivante :

`www.math.univ-paris13.fr/~lavauzelle/teaching/2022-23/theorie-information.html`

($\star$) exercice fondamental ($\star\star$) pour s'entraîner ($\star\star\star$) pour aller plus loin sur machine

Exercice 1. ($\star\star$) Canaux binaires symétriques en parallèle.



On considère deux canaux binaires symétriques de même paramètre λ, placés en parallèle. Le premier prend en entrée les valeurs $\{0, 1\}$, le second $\{2, 3\}$, comme sur la figure ci-contre. Cela permet de définir un canal avec une entrée de taille 4, que l'on appelle C. On nomme également X l'entrée du canal et Y sa sortie.

Question 1.– Donner la matrice de transition du canal C.

Question 2.– Calculer $H(Y \mid X = x)$ pour tout $x \in \{0, 1, 2, 3\}$, puis en déduire $H(Y \mid X)$.

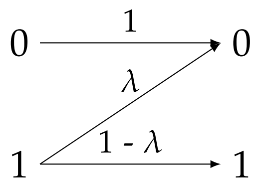
Question 3.– Démontrer que la capacité du canal C est $2 - h_2(\lambda)$ où h_2 est la fonction d'entropie binaire.

Question 4.– Commenter la capacité pour $\lambda = 1$.

Question 5.– Pour $\lambda = 1/2$, la capacité d'un BSC$_\lambda$ est nulle car le bruit est maximal. Pourquoi la capacité n'est-elle pas nulle dans le cas du canal C ?

Exercice 2. (⋆⋆) Canal Z.

Dans cet exercice, on se propose de calculer la capacité d'un canal de transmission appelé « canal Z ». Ce canal est binaire (l'entrée et la sortie ont taille 2), et peut être défini par le diagramme suivant, lui donnant son nom.



On note X et Y les variables aléatoires, toutes deux définies sur $\{0,1\}$, associées à la sortie et à l'entrée du canal. On note $\alpha := p(X=0)$. On rappelle que

$$h(t) := t \log_2 \frac{1}{t} + (1-t) \log_2 \frac{1}{1-t}$$

est la fonction d'entropie binaire.

Question 1.– Donner la matrice de transition $\boldsymbol{M}$ du canal.

Question 2.– Calculer $H(Y \,|\, X=0)$. Interpréter.

Question 3.– Montrer que $H(Y \,|\, X) = (1-\alpha)h(\lambda)$.

Question 4.– Calculer $H(Y)$ puis $I(X\,;Y)$.

Pour $\lambda \in]0,1[$ fixé, on pose $f_\lambda(x) := h((1-\lambda)(1-x)) - (1-x)h(\lambda)$ et on note

$$\mu(\lambda) := 1 - \frac{1}{(1-\lambda)(1+2^{h(\lambda)/(1-\lambda)})}\,.$$

Question 5.– Démontrer que le minimum de f_λ sur $[0,1]$ est atteint en $x = \mu(\lambda)$.

Question 6.– En déduire que la capacité du canal Z est

$$\log_2\left(1 + \frac{1}{2^{h(\lambda)/(1-\lambda)}}\right)\,.$$

Question 7.– Que vaut cette capacité pour $\lambda \to 0$? Interpréter.

Exercice 3. ($\star$) Mise en application d'un code convolutif.

On considère le code convolutif défini par les relations :

$$c_m^{(1)} = x_m + x_{m-2} + x_{m-3},$$
$$c_m^{(2)} = x_m + x_{m-1} + x_{m-3}.$$

Question 1.– Donner les représentations

1. algébrique,
2. sous forme de registre à décalage,
3. sous forme d'automate,
4. sous forme de treillis,

de ce code convolutif.

Question 2.– Encoder le mot $\boldsymbol{x} = (0101000\dots)$.

Question 3.– À l'aide de l'algorithme de Viterbi, décoder la séquence $\boldsymbol{y} = (\boldsymbol{y}^{(1)}, \boldsymbol{y}^{(2)})$ donnée par

$$\boldsymbol{y}^{(1)} = (111100100\dots),$$
$$\boldsymbol{y}^{(2)} = (010001000\dots).$$