Université Paris 8 Année 2022–2023

M1 Mathématiques et applications, parcours ACC

Théorie de l'information – Exercices complémentaires

30/11/2022

Retrouvez cette feuille d'exercices à l'adresse suivante :

`www.math.univ-paris13.fr/~lavauzelle/teaching/2022-23/theorie-information.html`

($\star$) exercice fondamental ($\star\star$) pour s'entraîner ($\star\star\star$) pour aller plus loin 💻 sur machine

Grandeurs en théorie de l'information

Exercice 1. ($\star$) Applications numériques.

On considère deux variables aléatoires X et Y, et on donne la distribution de la loi conjointe de (X, Y) :

	x_0	x_1	x_2
y_0	1/8	1/4	0
y_1	0	1/2	1/8

Question 1.– Calculer $H(X, Y)$.

Question 2.– Calculer $H(X)$ et $H(Y)$.

Question 3.– Calculer $I(X ; Y)$.

Exercice 2. ($\star$) Énigme.

Lors d'un interrogatoire, deux suspects sont intérrogés séparément pour un délit. On suppose qu'à chaque phrase prononcée, ils mentent avec probabilité 2/3.

Le premier des deux suspects affirme ne pas être coupable du délit.

Ensuite, lorsqu'on demande au second suspect si le premier est coupable, il répond que non.

Question 1.– Quelle est la probabilité que le premier suspect soit coupable du délit ?

Exercice 3. ($\star\star$) Mélange de cartes.

Un jeu de cartes standard est constitué de 52 cartes. On note $\mathcal{X} = \{1, \ldots, 52\}$ l'ensemble de ces cartes. On définit également $\mathfrak{S}_{\mathcal{X}}$ comme l'ensemble de toutes les permutations sur $\mathcal{X}$. Informellement, une permutation sur $\mathcal{X}$ correspond à un mélange des cartes.

Étant donnée une permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_{\mathcal{X}}$, on peut alors définir la variable aléatoire $\sigma(X) : \Omega \to \mathcal{X}$ comme

$$\sigma(X) := \sigma \circ X$$

Question 1.– Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_{\mathcal{X}}$ fixé. Démontrer que $H(\sigma(X)) = H(X)$.

Soit U une variable aléatoire de loi uniforme sur le groupe $\mathfrak{S}_{\mathcal{X}}$. On définit la variable $Y := U(X) : \Omega \to \mathcal{X}$ par

$$Y(\omega) := U(\omega)(X(\omega)) .$$

Question 2.– Démontrer que Y est uniforme sur $\mathcal{X}$. En déduire que $H(Y) \geq H(X)$. Interpréter ce résultat.

Soit V une variable de loi non-uniforme sur le groupe $\mathfrak{S}_{\mathcal{X}}$, c'est-à-dire qu'il existe deux permutations $\sigma, \sigma' \in \mathfrak{S}_{\mathcal{X}}$ tels que $p(\sigma) \neq p(\sigma')$.

Question 3.– Décrire une variable X telle que $Z := V(X)$ satisfait $H(Z) < H(X)$.

Exercice 4. ($\star\star$) Questions autour de l'entropie.

Soit X une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Question 1.– A-t-on toujours $H(X) = H(2X)$? Justifier.

Question 2.– A-t-on toujours $H(X) = H(X^2)$? Justifier.

Codage de source

Exercice 5. ($\star$) Codes préfixes et uniquement décodables.

Parmi les codes suivants, lesquels sont préfixes ? Lesquels sont uniquement décodables ?

1. $\{1, 10, 100\}$
2. $\{0, 01, 001\}$
3. $\{000, 001, 100, 111, 01\}$
4. $\{000, 001, 100, 111, 10\}$
5. $\{101, 010, 0\}$

Exercice 6. ($\star$) Questions autour des codes de Huffman et de Shannon–Fano.

Question 1.– Peut-on construire une source X dont les codes de Huffman et de Shannon–Fano associés ont même longueur moyenne ? Justifier.

Question 2.– Peut-on construire une source X dont les codes de Huffman et de Shannon–Fano associés ont une longueur moyenne qui diffère exactement de 1 ? Justifier.

Exercice 7. ($\star\star$) Code de Huffman et suite de Fibonacci.

La suite de Fibonacci $(F_n)_{n\geq 1}$ est donnée par :

$$F_1 = 1, \quad F_2 = 1, \quad F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \text{ pour } n \geq 3\,.$$

Par exemple, on a $F_3 = 2$, $F_4 = 3$ et $F_9 = 34$. On note $S_n = \sum_{i=1}^{n} F_i$.

Pour $n \geq 2$ fixé, on considère une source $X^{(n)}$ définie sur l'alphabet $\{x_1, \ldots, x_n\}$, et telle que

$$\mathbb{P}(X = x_i) = \frac{F_i}{S_n} \text{ pour tout } i \in \{1, \ldots, n\}$$

Question 1.– Donner la distribution de probabilité de la source pour $n = 6$.

Question 2.– Construire l'arbre binaire du code de Huffman associé à la source $X^{(6)}$.

On souhaite maintenant étudier la forme de l'arbre de Huffman pour $n \geq 2$ quelconque.

Question 3.– Démontrer que $S_n = F_{n+2} - 1$ pour tout $n \geq 1$.

Question 4.– En déduire la forme de l'arbre de Huffman associé. Le résultat devra être démontré formellement.

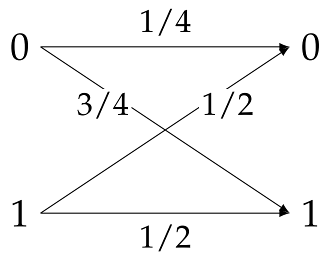
Question 5.– **[Plus difficile]** Démontrer qu'asymptotiquement, la longueur moyenne du code de Huffman de source $X^{(n)}$ est finie. On pourra s'aider (sans les démontrer) des formules ci-dessous, valables pour tout $n \geq 1$:

$$\phi^{n-2} \leq F_n \leq \phi^{n-1} \text{ où } \phi := \frac{1+\sqrt{5}}{2} > 1 \qquad \text{et} \qquad \sum_{i=1}^{n} i x^i = \frac{x}{(x-1)^2}\Big((n-1)x^n - n x^{n-1} + 1\Big)\,.$$

Codage de canal

Exercice 8. ($\star$) Calcul numérique de capacité.

On considère un canal binaire dont le diagramme de transition est le suivant :



On note X l'entrée du canal et Y sa sortie.

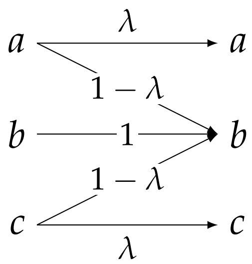
Question 1.– Donner la matrice de transition du canal.

Question 2.– On note $\alpha = \mathbb{P}(X = 0)$. Calculer $H(Y)$ et $H(Y \mid X)$ en fonction de α.

Question 3.– En déduire la capacité du canal.

Exercice 9. ($\star\star$) Capacité d'un canal.

On considère le canal représenté par le diagramme suivant. L'entrée (représentée par la variable X) et la sortie (représentée par la variable Y) sont définies sur l'alphabet $\{a, b, c\}$.



Question 1.– Donner la matrice de transition du canal.

Question 2.– On note $x := 1 - \mathbb{P}(X = b) = \mathbb{P}(X = a) + \mathbb{P}(X = c)$. Démontrer que

$$H(Y \mid X) = x\,h(\lambda)$$

où $h(\lambda) = \lambda \log_2 \frac{1}{\lambda} + (1-\lambda)\log_2 \frac{1}{1-\lambda}$ est l'entropie binaire.

Question 3.– On note $y := \frac{\mathbb{P}(X=a)}{\mathbb{P}(X=a)+\mathbb{P}(X=c)}$ de sorte que $\mathbb{P}(X = a) = xy$. Démontrer que

$$H(Y) = x\lambda h(y) + h(x\lambda)\,.$$

Question 4.– En déduire que l'information mutuelle entre X et Y s'exprime comme

$$I(X\,;Y) = x\lambda h(y) + h(x\lambda) - xh(\lambda)\,.$$

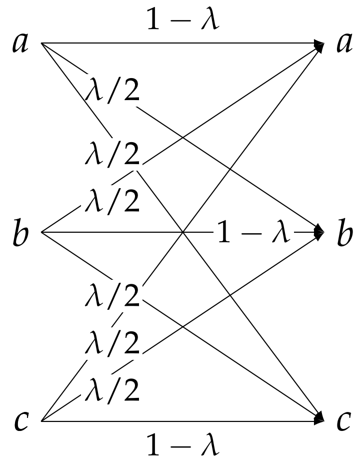
Question 5.– Dans cette question uniquement, on suppose que $\lambda = 0$. Que vaut la capacité du canal dans ce cas ? Interpréter le résultat.

Question 6.– Dans cette question uniquement, on suppose que $\lambda = 1$. Que vaut la capacité du canal dans ce cas ? Interpréter le résultat.

Question 7.– **[plus difficile]** Dans cette question, le paramètre λ est de nouveau un réel quelconque dans [0,1]. Pour quelle valeur de y l'information mutuelle est-elle maximale ? En déduire la capacité du canal.

Exercice 10. ($\star\star$) Canal ternaire.

On considère un canal ternaire, c'est-à-dire dont l'entrée X et la sortie Y sont définies sur un alphabet $\{a, b, c\}$ de cardinal 3. Le canal a le diagramme de transition suivant :



Autrement dit, on a :

$$\mathbb{P}(Y = x \,|\, X = x) = 1 - \lambda, \quad \forall x \in \{a, b, c\}$$

et

$$\mathbb{P}(Y = y \,|\, X = x) = \lambda/2, \quad \begin{array}{l} \forall (x, y) \in \{a, b, c\}^2 \\ \text{tels que } x \neq y \end{array} .$$

On rappelle que $h(t) := -t \log_2(t) - (1-t) \log_2(1-t)$ est la fonction d'entropie binaire.

Question 1.– Donner la matrice de transition du canal.

Question 2.– Démontrer que, pour tout $x \in \{a, b, c\}$, on a $H(Y \,|\, X = x) = h(\lambda) + \lambda$. En déduire la valeur de $H(Y \,|\, X)$.

Question 3.– Quelle est la valeur maximale que peut atteindre $H(Y)$? Avec quelle source X cette valeur est-elle atteinte ?

Question 4.– Démontrer que la capacité du canal est :

$$\mathrm{Cap}(\lambda) = \log_2(3) - h(\lambda) - \lambda \,.$$

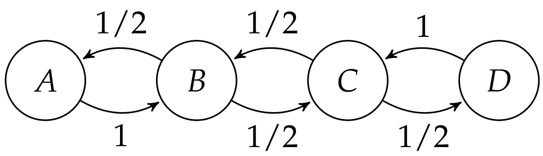
Question 5.– Calculer et intérpréter la capacité du canal lorsque $\lambda = 2/3$.

Question 6.– Calculer et intérpréter la capacité du canal lorsque $\lambda = 0$.

Processus stochastiques

Exercice 11. ($\star$) Marche aléatoire sur le graphe chaîne de taille 4.

On considère une marche aléatoire sur le graphe suivant :



Les arêtes sortantes d'un sommet $V \in \{A, B, C, D\}$ sont étiquetées par la probabilité de transition de V vers le sommet cible. Par exemple, la probabilité de se déplacer de B vers A est de $1/2$.

On note X_n la position (sommet A, B, C ou D) à l'instant n, et on considère le processus stochastique $\boldsymbol{X} = (X_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Question 1.– Le processus $\boldsymbol{X}$ est-il sans mémoire ? Est-il markovien ? Est-il homogène ? Justifier rapidement.

Question 2.– Donner la matrice de transition du processus $\boldsymbol{X}$.

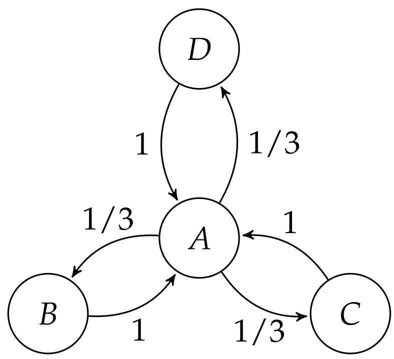
Question 3.– Sous quelle condition le processus $\boldsymbol{X}$ est-il stationnaire ?

Question 4.– Dans le cas où $\boldsymbol{X}$ est stationnaire, déterminer son taux d'entropie.

Question 5.– Dans le cas où X_0 est déterministe égale à A, calculer la loi de X_{2n} et la loi de X_{2n+1}.

Exercice 12. ($\star$) Marche aléatoire sur le graphe étoilé.

On considère une marche aléatoire sur le graphe suivant :



Les arêtes sortantes d'un sommet $V \in \{A, B, C, D\}$ sont étiquetées par la probabilité de transition de V vers le sommet cible. Par exemple, la probabilité de A vers B est $1/3$.

On note X_n la position (sommet A, B, C ou D) à l'instant n, et on considère le processus stochastique $\boldsymbol{X} = (X_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Question 1.– Le processus $\boldsymbol{X}$ est-il sans mémoire ? Est-il markovien ? Est-il homogène ? Justifier rapidement.

Question 2.– Donner la matrice de transition du processus $\boldsymbol{X}$.

Question 3.– Sous quelle condition le processus $\boldsymbol{X}$ est-il stationnaire ?

Question 4.– Dans le cas où $\boldsymbol{X}$ est stationnaire, déterminer son taux d'entropie.

Question 5.– Dans le cas où X_0 est déterministe égale à A, calculer la loi de X_{2n} et la loi de X_{2n+1}.

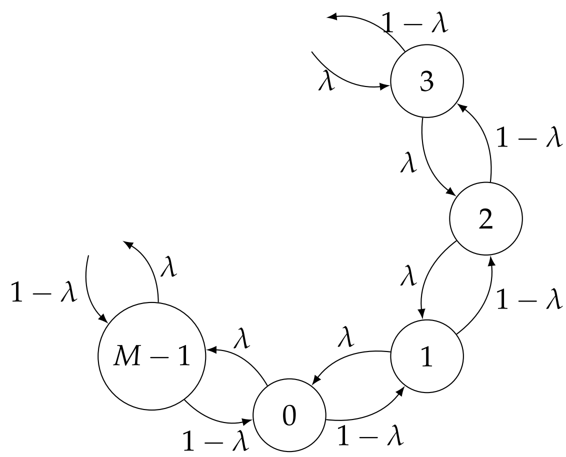
Exercice 13. ($\star\star$) Marche aléatoire sur un cycle.

Dans cet exercice, on fixe un entier $M \geq 3$ et on s'intéresse au processus stochastique donné une marche aléatoire dans $\mathbb{Z}/M\mathbb{Z}$. La position initiale X_0 de la marche est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{Z}/M\mathbb{Z}$. Puis, chaque nouvelle position X_n est tirée en fonction de la précédente d'après la règle suivante :

$$X_n = X_{n-1} + (-1)^{B_n} \mod M$$

où la valeur de B_n est tirée selon une loi de Bernoulli de paramètre λ.

Autrement dit, la marche aléatoire peut être représentée par le diagramme suivant :



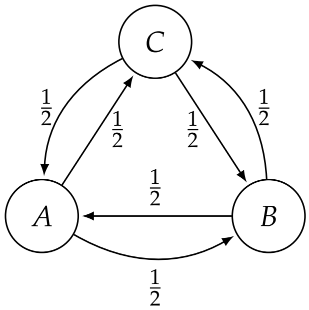
Dans la première partie de l'exercice (questions 1, 2 et 3), on suppose que la variable X_0 est uniforme sur $\mathbb{Z}/M\mathbb{Z}$.

Question 1.– Déterminer la loi de X_1, puis celle de X_n pour tout $n \geq 0$.

Question 2.– Le processus stochastique $\boldsymbol{X} = \{X_n\}_{n \geq 0}$ est-il sans mémoire ? Est-il markovien ? Est-il stationnaire ?

Question 3.– Déterminer $H(X_1 \mid X_0)$. En déduire le taux d'entropie du processus $\boldsymbol{X}$.

Dans cette seconde partie de l'exercice, on ne suppose plus que X_0 est uniforme. En revanche, on fixe $\lambda = 1/2$ et $M = 3$. Autrement dit, le diagramme définissant la marche aléatoire est :



Question 4.– Donner la matrice de transition du processus $\boldsymbol{X}$.

Question 5.– Calculer explicitement $\boldsymbol{P}$, $\boldsymbol{P}^2$ et $\boldsymbol{P}^3$.

Question 6.– Démontrer que la matrice $\boldsymbol{P}$ est diagonalisable.

Question 7.– Donner la forme de $\boldsymbol{P}^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On pourra plus simplement écrire la matrice $\boldsymbol{P}^n$ comme un produit de trois matrices que l'on explicitera.

Question 8.– Démontrer que pour toute distribution initiale X_0, la distribution X_n tend terme à terme vers la distribution uniforme $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$, lorsque $n \to \infty$.