

Théorie de l'information – Interrogation 1 (1h)

23 octobre 2020

Exercice 1 – Entropie et code de Shannon-Fano.

Soit $m \geq 1$ et $M = 2^m$. On considère un alphabet $\mathcal{X} = \{x_1, \dots, x_M\}$.

Question 1. Donner une majoration de l'entropie d'une variable aléatoire à valeurs dans \mathcal{X} . Quel type de variable atteint cette borne ?

Soit X une source sur l'alphabet \mathcal{X} . On suppose que X est uniforme.

Question 2. Donner la forme de l'arbre binaire du code de Shannon-Fano associé à la source X .

Question 3. Calculer la longueur moyenne de ce code. Est-il optimal ?

Exercice 2 – Information mutuelle.

Lors du tirage du loto, des boules numérotées de 1 à 49 sont tirées **successivement, uniformément et sans remise**.

On note X_1 la variable aléatoire correspondant à la valeur de la boule obtenue au premier tirage, et X_2 celle obtenue au second tirage.

Question 1. Calculer $H(X_1)$ et $H(X_2)$.

Question 2. Calculer l'information mutuelle $I(X_1; X_2)$.

Exercice 3 – Codes uniquement décodables.

Pour les codes binaires suivants, déterminer **en justifiant** s'ils sont uniquement décodables.

Question 1. Le code dont les mots sont :

$$\{0, 001, 10, 101, 11111\}.$$

Question 2. Le code dont les mots sont :

$$\{01, 10, 111, 1101\}.$$

Question 3. Le code B défini sur l'ensemble \mathbb{N} des entiers naturels, tel que le mot associé à l'entier $n = \sum_{i=0}^k n_i 2^i$ est :

$$B(n) = (n_0, n_1, \dots, n_k),$$

où $k = \lfloor \log_2(n) \rfloor$ si $n \geq 1$ et $k = 0$ sinon.

Exercice 4 – Codes de Huffman.

Question 1. On considère une source suivant une loi dont la distribution est :

$$(0.6, 0.25, 0.09, 0.04, 0.02).$$

Donner le codage de Huffman correspondant.

Soit maintenant X une source de distribution $p_1 \geq \dots \geq p_m$. On suppose que

$$p_i \leq \frac{1}{2} p_{i-1}$$

pour tout $i \in \{2, \dots, m\}$.

Question 2. Soit $i \geq 2$. Comparer les valeurs de p_{i-1} , p_i et $\sum_{j=i+1}^m p_j$.

Question 3. À quelle étape de l'algorithme d'Huffman la probabilité p_i sera-t-elle sélectionnée pour la construction de l'arbre? Justifier.

Question 4. En déduire la forme de l'arbre binaire du code de Huffman associé à la source X . Quelle est la longueur maximale d'un mot de code? La longueur minimale?