Université Paris 8 — Année 2020–2021

Master Mathématiques et applications

Théorie de l'information – Devoir à la maison

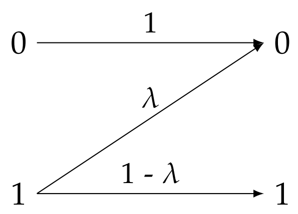
13 novembre 2020
à rendre pour le vendredi 18 décembre 2020, **dernier délai**

Ce devoir à la maison est constitué de deux exercices indépendants.

Document à fournir. Vous devez rendre par email un fichier contenant vos réponses, qui sera obligatoirement au format `.pdf`. Il sera adressé à `julien.lavauzelle@univ-paris8.fr` avant le vendredi 18 décembre 2020, 23h59. Au-delà de cette date, le devoir ne sera ni lu ni évalué.

Exercice 1. Canal Z

Dans cet exercice, on se propose de calculer la capacité et la distribution stationnaire d'un canal de transmission appelé « canal Z ». Ce canal est binaire (l'entrée et la sortie ont taille 2), et peut être défini par le diagramme suivant, lui donnant son nom.



On note X et Y les variables aléatoires, toutes deux définies sur $\{0,1\}$, associées à la sortie et à l'entrée du canal. On note $\alpha := p(X=0)$. On rappelle que

$$h(t) := t\log_2 \frac{1}{t} + (1-t)\log_2 \frac{1}{1-t}$$

est la fonction d'entropie binaire.

Question 1.– Donner la matrice de transition $\boldsymbol{M}$ du canal.

Question 2.– Calculer $H(Y \mid X = 0)$. Interpréter.

Question 3.– Montrer que $H(Y \mid X) = (1 - \alpha)h(\lambda)$.

Question 4.– Calculer $H(Y)$ puis $I(X; Y)$.

Pour $\lambda \in]0,1[$ fixé, on pose $f_\lambda(x) := h((1-\lambda)(1-x)) - (1-x)h(\lambda)$ et on note

$$\mu(\lambda) := 1 - \frac{1}{(1-\lambda)(1+2^{h(\lambda)/(1-\lambda)})} .$$

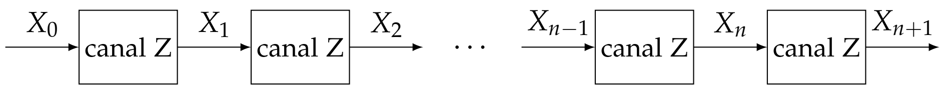
Question 5.– Démontrer que le minimum de f_λ sur $[0,1]$ est atteint en $x = \mu(\lambda)$.

Question 6.– En déduire que la capacité du canal Z est

$$\log_2\left(1 + \frac{1}{2^{h(\lambda)/(1-\lambda)}}\right) .$$

Question 7.– Que vaut cette capacité pour $\lambda \to 0$? Interpréter.

On considère maintenant une concaténation infinie de canaux Z de même paramètre λ. On note $X_0 = X$ et X_n la sortie du n-ème canal.



Question 8.– Calculer $\boldsymbol{M}^2$. Que peut-on dire du canal d'entrée X_0 et de sortie X_2 constitué de la concaténation des 2 premiers canaux ? Peut-on l'assimiler à un canal Z ? Si oui, donner le paramètre associé.

Question 9.– Calculer $\boldsymbol{M}^n$ pour tout $n \geq 0$.

Question 10.– Que vaut $\lim_{n\to\infty} p(X_n = 1)$? Interpréter.

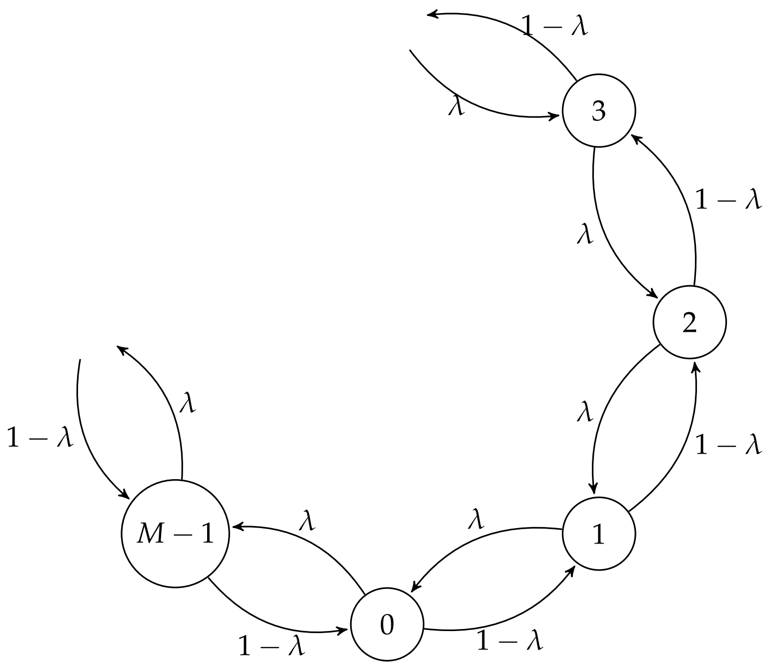
Exercice 2. Marche aléatoire dans $\mathbb{Z}/M\mathbb{Z}$

On s'intéresse ici au processus stochastique donné une marche aléatoire dans $\mathbb{Z}/M\mathbb{Z}$ pour un entier fixé $M \geq 3$. La position initiale X_0 de la marche est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{Z}/M\mathbb{Z}$. Puis, chaque nouvelle position X_n est tirée en fonction de la précédente d'après la règle suivante :

$$X_n = X_{n-1} + (-1)^{B_n} \mod M$$

où la valeur de B_n est tirée selon une loi de Bernoulli de paramètre λ.

Autrement dit, la marche aléatoire peut être représentée par le diagramme suivant :



Attention. L'exercice est composé de deux parties, dans lesquelles diffèrent les hypothèses sur les données du problème.

— Partie 1 —

Dans cette partie de l'exercice, on suppose que la variable X_0 est uniforme sur $\mathbb{Z}/M\mathbb{Z}$.

Question 1.– Déterminer la loi de X_1, puis celle de X_n pour tout $n \geq 0$.

Question 2.– Le processus stochastique $\boldsymbol{X} = \{X_n\}_{n\geq 0}$ est-il sans mémoire ? markovien ? stationnaire ?

Question 3.– Déterminer $H(X_1 \mid X_0)$. En déduire le taux d'entropie du processus $\boldsymbol{X}$.

Question 4.– Donner la matrice de transition du processus $\boldsymbol{X}$. C'est-à-dire, déterminer la matrice $\boldsymbol{P}$ de taille $(M \times M)$ telle que, si $\boldsymbol{a} = (a_0, \ldots, a_{M-1})^\top$ est la distribution de X_{n-1}, alors $\boldsymbol{Pa}$ est la distribution de X_n.

Soit $\boldsymbol{J}$ la matrice de taille $(M \times M)$ définie de la sorte :

$$\boldsymbol{J} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & & & 0 \\ \vdots & 0 & 1 & 0 & & & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & & & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \ldots & & & \ldots & 0 \end{pmatrix}.$$

Question 5.– Que valent $\boldsymbol{J}^2$, $\boldsymbol{J}^{M-1}$, $\boldsymbol{J}^M$? Exprimer $\boldsymbol{P}$ en fonction des $\boldsymbol{J}^i$ et de λ.

— Partie 2 —

Dans cette partie de l'exercice, on ne suppose plus que X_0 est uniforme. En revanche, on fixe $\lambda = 1/2$ et $M = 3$.

Question 6.– Le processus $\boldsymbol{X}$ est-il toujours markovien ?

Question 7.– Calculer explicitement $\boldsymbol{P}$, $\boldsymbol{P}^2$ et $\boldsymbol{P}^3$.

Question 8.– Démontrer que la matrice $\boldsymbol{P}$ est diagonalisable.

Question 9.– Donner la forme de $\boldsymbol{P}^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On pourra écrire la matrice $\boldsymbol{P}^n$ comme un produit de trois matrices que l'on explicitera.

Question 10.– Démontrer que pour toute distribution initiale X_0, la distribution X_n tend terme à terme vers la distribution uniforme $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$, lorsque $n \to \infty$.