

2I003 – Interrogation courte de TD  
durée : 20 min.

29 novembre 2016

Dans toute l'interrogation, on note  $G = (V, E)$  un graphe non orienté, où  $V$  est l'ensemble des sommets et  $E$  est l'ensemble des arêtes. **Les graphes considérés ne sont pas orientés, et n'ont ni boucle ni arête double.** Pour  $V' \subseteq V$ , on rappelle aussi que le sous-graphe de  $G = (V, E)$  induit par  $V'$  est le graphe  $G' = (V', E')$  tel que  $E' = \{\{u, v\} \in E \text{ tel que } u \in V' \text{ et } v \in V'\}$ .

**Exercice 1**

On note  $d(v)$  le degré d'un sommet  $v \in V$ .

**Question 1.1.-** Si un graphe  $G$  est connexe, que peut-on dire de  $\min\{d(v), v \in G\}$ ? Justifiez.

**Question 1.2.-** Si  $G$  est un arbre binaire, que peut-on dire de  $\max\{d(v), v \in G\}$ ? Justifiez.

**Question 1.3.-** Soit  $G$  un arbre binaire, on note  $h$  sa hauteur. Montrez que la plus longue chaîne élémentaire de  $G$  a une longueur  $\ell \leq 2h - 2$ .

**Question 1.4.-** Soit  $G$  un graphe quelconque. Montrez que  $\sum_{v \in V} d(v) = 2|E|$ .

**Exercice 2**

On dit qu'un graphe  $G = (V, E)$  est *complet* si, pour tout  $(u, v) \in V^2$  tel que  $u \neq v$ , on a  $\{u, v\} \in E$ . Autrement dit, chaque paire de sommets du graphe est connectée par une arête. On note  $K_n$  le graphe complet à  $n$  sommets.

**Question 2.1.-** Le graphe  $K_n$  est-il cyclique? est-il connexe?

**Question 2.2.-** Combien  $K_n$  possède-t-il d'arêtes?

**Question 2.3.-** Soit  $V'$  un sous-ensemble des sommets de  $K_n$  de taille  $p$ . Que dire du sous-graphe de  $K_n$  induit par  $V'$ ?