

2I003 – Interrogation longue de TD

durée : 1 heure

04 octobre 2016

Questions de cours.

1) a) Les propositions suivantes :

$$a \Rightarrow b$$

$$\text{non}(b) \Rightarrow \text{non}(a)$$

sont-elles équivalentes ?

b) Comment s'appelle cette transformation ?

2) Qu'est-ce qu'un algorithme correct ? (donner deux critères nécessaires)

Exercice.

Dans cet exercice, on se propose de démontrer la validité de l'algorithme d'exponentiation suivant :

```
def ExponentiationBinaire(x, n):
    if (n == 0):
        return 1
    else:
        aux = ExponentiationBinaire(x, n // 2)
        if (n % 2 == 0):
            return aux * aux
        else:
            return aux * aux * x
```

On rappelle que $n // 2$ et $n \% 2$ sont respectivement le quotient et le reste de la division euclidienne de n par 2.

1) Donnez l'arbre d'appels de `ExponentiationBinaire` lorsque les paramètres d'entrée sont $x=2$ et $n=5$. Écrire les valeurs retournées par chaque appel.

2) Montrez que l'algorithme termine.

3) Soit $x > 0$ et $n \in \mathbb{N}$. On note $m = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ le quotient de la division euclidienne de n par 2, et $y = x^m$. Montrez que :

- si n est pair, alors $x^n = y^2$;
- si n est impair, alors $x^n = x \times y^2$.

4) Montrez par récurrence forte sur n que l'algorithme est valide, c'est-à-dire que pour tout $x > 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, il renvoie x^n .

5) Conclure concernant la validité de l'algorithme.

Question subsidiaire : pourquoi cet algorithme est-il aussi connu sous le nom d'exponentiation « rapide » (donnez un argument de complexité) ?